

**INFN-12-18/LNF**  
**12<sup>th</sup> November 2012**

## **APPUNTI DI RELATIVITA' RISTRETTA E DI CINEMATICA RELATIVISTICA**

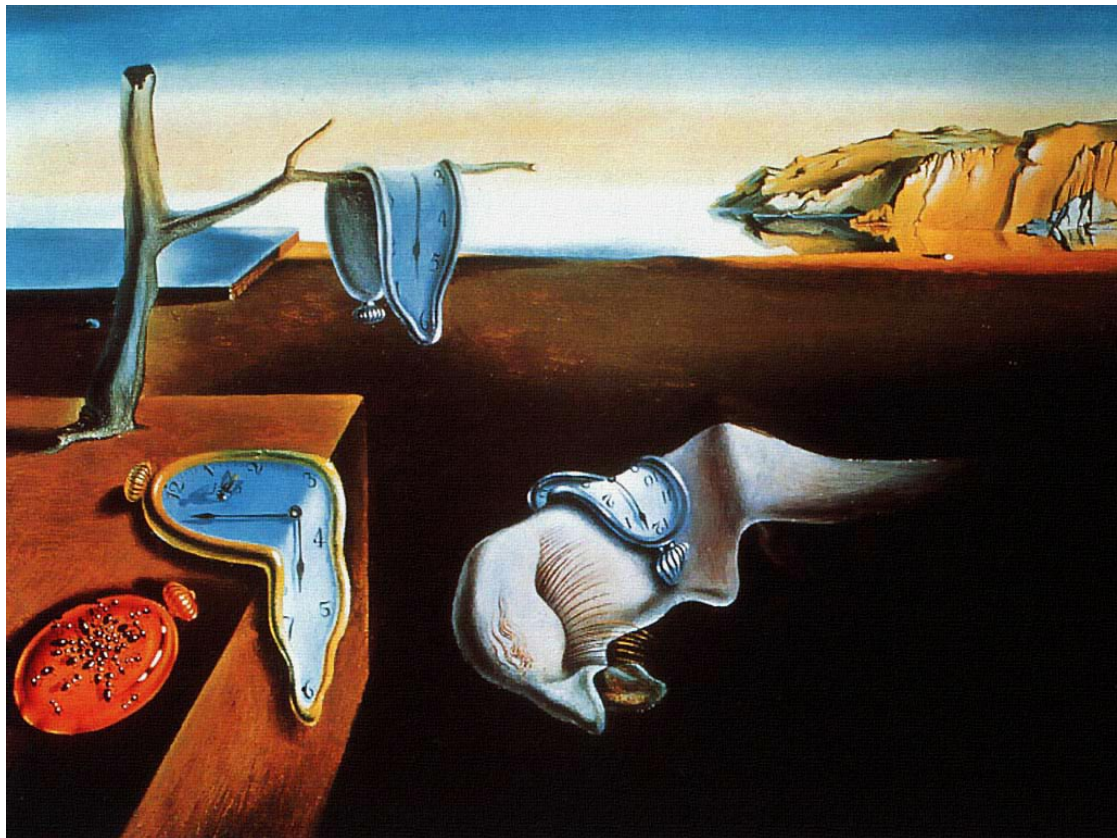
M. Artioli<sup>1</sup>, D. Babusci<sup>2</sup>, G. Dattoli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>) ENEA - Centro Ricerche Frascati, v.le E. Fermi, 45, 00044, Frascati (Roma), Italy

<sup>2</sup>) INFN - Laboratori Nazionali di Frascati, v.le E. Fermi, 40, 00044 Frascati (Roma), Italy

# APPUNTI DI RELATIVITA' RISTRETTA E DI CINEMATICA RELATIVISTICA

*M. Artioli, D. Babusci, G. Dattoli*



## PREFAZIONE

Questi appunti contengono alcuni elementi di riflessione sul significato fisico, sul formalismo della Relatività Ristretta, o Speciale, e sulle sue applicazioni. Sebbene l'argomento sia stato ampiamente trattato, abbiamo ritenuto opportuna una rivisitazione organica, che offrisse al lettore una via di mezzo tra un resoconto elementare e uno specialistico. Il taglio e l'indirizzo degli appunti sono pertanto schematici e pragmatici ed evitano qualsivoglia connotazione speculativa o filosofica. Lo scopo è stato essenzialmente quello di convincere che la Relatività Ristretta, nelle sue accezioni di cinematica e di dinamica, è uno strumento per interpretare la fenomenologia che coinvolge corpi in moto a velocità non trascurabili rispetto a quella della luce.

Gli appunti si dividono in due parti. La prima, essenzialmente teorica, fornisce gli elementi di base dei principi fisici, del formalismo e della sua interpretazione. La seconda riguarda applicazioni di varia natura e viene presentata sotto forma di esercizi e complementi.

La letteratura relativa agli argomenti qui trattati è sterminata, per cui la corretta citazione delle fonti cui ci siamo ispirati è molto difficile. Sul web sono reperibili pregevoli trattazioni "moderne" dei problemi relativistici, in particolare per quanto concerne la visualizzazione interattiva dei principali concetti della teoria tramite i diagrammi di Minkowski. Come utile esempio, citiamo il sito [www.trell.org/div/minkowski.html](http://www.trell.org/div/minkowski.html).

Per quanto riguarda la parte espositiva riteniamo di notevole efficacia le lezioni di D. Morin, rintracciabili sul sito [www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/chap11.pdf](http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/chap11.pdf). Inoltre, si consiglia come utile riferimento per l'analisi dettagliata di paradossi, quale quello dei gemelli, il sito [www2.ph.ed.ac.uk/teaching/course-notes/documents/62/1640-10.pdf](http://www2.ph.ed.ac.uk/teaching/course-notes/documents/62/1640-10.pdf). Altre fonti come *Wikipedia* e il sito [hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/relcon.html](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/relcon.html) saranno citate nel testo, quando necessario.

La relatività (ristretta e generale) ha determinato un modo nuovo di concepire lo spazio e il tempo e riteniamo che quanto riportato in copertina ("La persistenza della memoria" di Salvador Dalí) valga più di ogni altro commento.

M. Artioli  
D. Babusci  
G. Dattoli

Frascati, Settembre 2012.

## 1 TEORIA



## 1.1 Introduzione

In questa parte introduttiva seguiremo una impostazione molto vicina a quella del famoso articolo di Einstein del 1905: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Annalen der Physik* **17**, 891. Questo lavoro segna l'inizio della Relatività Ristretta come la concepiamo oggi, sebbene un anno prima fosse comparsa una memoria di Lorentz<sup>1</sup> (non nota ad Einstein al momento della pubblicazione del suo articolo), e malgrado il fondamentale lavoro di Poincaré<sup>2</sup> del 1906.

Perché le memorie di Lorentz e Poincaré non furono altrettanto influenti nello sviluppo e nell'affermazione delle teorie relativistiche? La risposta è piuttosto semplice: l'articolo di Einstein brilla di una chiarezza espositiva e una potenza esemplificatrice totalmente assente negli altri, in cui l'aspetto formale è dominante. Inoltre, solo nell'articolo di Einstein risulta con evidente chiarezza la radicale novità della “fenomenologia” relativistica e il distacco dal punto di vista classico.

Poiché riteniamo che l'introduzione dei diagrammi di Minkowski<sup>3</sup> costituisca un elemento di notevole semplificazione per la visualizzazione dei concetti fisici - a volte di non facile digeribilità - sviluppati nell'ambito della teoria, insisteremo sulla esposizione di tale tecnica e sul relativo utilizzo.

Non faremo, invece, riferimento all'esperimento di Michelson e Morley<sup>4</sup>, perché non giocò, nello sviluppo concettuale della teoria, il ruolo cruciale che gli viene attualmente ascrivito<sup>5</sup>. Tale lavoro, infatti, non è citato nell'articolo di Einstein del 1905, il quale dichiarò, nel 1942<sup>6</sup>, quanto segue: *In my own development Michelson's result has not had a considerable influence. I even do not remember if I knew of it at all when I wrote my first paper on the subject (1905). The explanation is that I was, for general reasons, firmly convinced that there does not exist absolute motion, and my problem was only how this could be reconciled with our knowledge of electrodynamics. One can therefore understand why in my personal struggle Michelson's experiment played no role or at least no decisive role.* In seguito, però, il risultato negativo di tale esperimento fu utilizzato da Einstein a supporto della teoria stessa e per evidenziare il carattere innaturale della contrazione di Lorentz-Fitzgerald.

A nostro parere, l'esperimento di Michelson e Morley, pur effettuato prima della formulazione della Relatività Ristretta, ha senz'altro svolto un ruolo cruciale a posteriori, di supporto e di riferimento. Non sembra, infatti, che l'idea e lo sviluppo dell'intero impianto teorico, frutto di anni di maturazione scientifica e filosofica nel vecchio continente, sia stato in alcun modo influenzato dalla nascente Fisica americana. Invitiamo comunque il lettore ad approfondire gli aspetti salienti dell'esperimento di Michelson e Morley, dopo la lettura di questi appunti<sup>7</sup>.

Due sistemi di riferimento si dicono *inerziali* se sono in moto relativo con velocità costante. Il principio di relatività classico, o Galileiana, assicura che le leggi della meccanica non dipendono dal sistema di riferimento, purché inerziale, dove vengono formulate. Nella Fig. 1 vengono

<sup>1</sup> H. Lorentz, *Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller Than That of Light*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Section of Sciences, Proceedings **6**, 809-831 (1903-04).

<sup>2</sup> H. Poincaré, *Sur la dynamique d'électron*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **21**, 129-175 (1906).

<sup>3</sup> H. Minkowski, *Raum und Zeit* 80. Versammlung Deutscher Naturforscher (Köln, 1908), Pubblicato in *Physikalische Zeitschrift* **10**, 104-111 (1909), and *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **18**, 75-88 (1909); si veda anche l'articolo di S. Walter citato nella didascalia di Fig. 19.

<sup>4</sup> A. A. Michelson and E. W. Morley, *Influence of Motion of the Medium on the Velocity of Light*, *American Journal of Science* **31**, 377-386 (1886); *ibid.*, *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, *American Journal of Science* **34**, 333-345 (1887).

<sup>5</sup> Per una analisi dettagliata si veda: J. Van Dongen, *On the role of the Michelson-Morley experiment: Einstein in Chicago*, *Arch. Hist. Exact Sci.* **63**, 655-663 (2009) [[arXiv:0908.1545](https://arxiv.org/abs/0908.1545)].

<sup>6</sup> Da una lettera di Einstein (17 marzo 1942) al biografo di Michelson, come riportato in G. Holton, *Einstein, Michelson, and the “crucial” experiment*, *Isis* **60**, 133-197 (1969); dello stesso autore si veda anche *Thematic Origins of Scientific Thought*, pp. 279-370, Cambridge, Harvard University Press (1995).

<sup>7</sup> Si veda: O. Darrigol, *The Genesis of the Theory of Relativity*, *Seminaire Poincaré* **1**, 1-22 (2005).

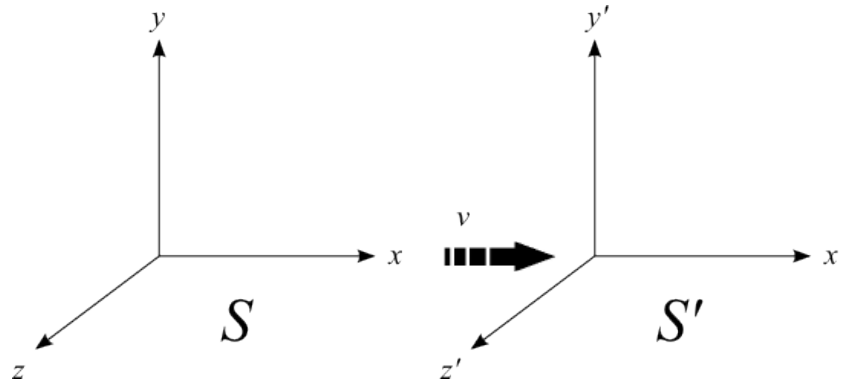


Fig. 1: Sistemi di riferimento inerziali e loro moto relativo.

riportate due terne cartesiane  $S$  e  $S'$ , con la seconda che slitta con velocità  $v$  (costante) nella direzione positiva dell'asse delle  $x$  della prima. Il principio di relatività classico può essere alternativamente formulato dicendo che le leggi della meccanica sono invarianti per trasformazioni galileiane, intendendo come tali la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1}$$

da cui segue che un corpo in moto nel sistema  $S$  con velocità  $V$ , sarà visto possedere nel sistema  $S'$  la velocità:

$$V' = V - v. \tag{2}$$

Inoltre, risulta evidente che le (1) non comportano alcuna trasformazione della variabile temporale, che risulta essere la stessa nei due sistemi di riferimento. Ovvero due orologi posti in  $S$  e  $S'$ , segneranno lo stesso tempo indipendentemente dalla velocità relativa e dalle posizioni in cui sono situati gli orologi. Eventi simultanei in  $S$  sono, pertanto, simultanei in  $S'$ .

In merito a quest'ultima affermazione, si consideri quanto illustrato in Fig. 2. Dal centro di una stanza vengono lanciate due biglie, con velocità  $v_p$ , in direzioni opposte, verso le pareti. Un osservatore A solidale con la stanza vedrà le due biglie raggiungere le pareti simultaneamente. Consideriamo ora la situazione dal punto di vista di un osservatore esterno B, in moto verso sinistra con velocità  $v < v_p$ . Esso vedrà la parete sinistra avvicinarsi verso di lui con velocità  $v$ , e, poiché valgono le regole della meccanica classica - quindi le ordinarie regole di composizione della velocità -, avremo che la pallina, che si muove verso sinistra, possiede per l'osservatore B una velocità

$$v_s = v_p - v. \tag{3}$$

La parete di destra si allontanerà con velocità  $v$  da B, che vedrà la pallina lanciata verso destra muoversi con velocità

$$v_d = v + v_p \tag{4}$$

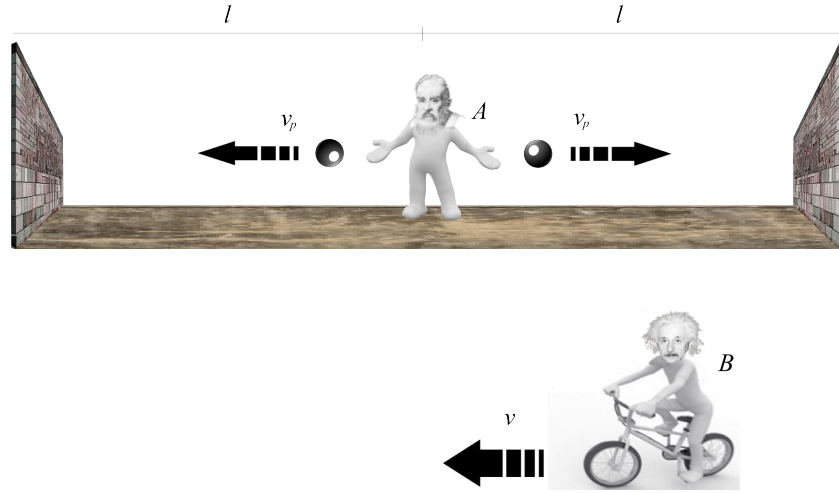


Fig. 2: Schema dell'esperimento concettuale sulla relatività della simultaneità.

per cui i tempi  $t_s$  e  $t_d$  impiegati dalle palline per raggiungere, rispettivamente, la parete sinistra e destra, risultano essere (si veda il paragrafo 2 per ulteriori commenti)

$$t_s = \frac{l}{v + v_p}, \quad t_d = \frac{l}{v_d - v}, \quad (5)$$

e, pertanto

$$t_s = t_d = \frac{l}{v_p}. \quad (6)$$

Abbiamo dunque concluso, che le biglie raggiungeranno simultaneamente le pareti di destra e di sinistra. La simultaneità degli eventi poggia evidentemente sull'assunto che valga la legge di composizione delle velocità, implicita nel principio di relatività Galileiana.

Nel seguito trarremo alcune conseguenze in merito alla relatività ristretta partendo dal seguente postulato<sup>8</sup>:

**la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi inerziali**

Una conseguenza immediata dell'assunzione di cui sopra è la perdita della simultaneità di eventi osservati in due sistemi di riferimento (inerziali) diversi.

Consideriamo quanto mostrato in Fig. 3, che è una variante della Fig. 2. Una sorgente di luce è posta al centro di una stanza, e un osservatore A, solidale con tale sistema di riferimento, vede la luce raggiungere le pareti opposte contemporaneamente. Come per l'esempio precedente, l'osservatore B, in moto con velocità  $v$  - come indicato in figura -, vedrà la parete sinistra muoversi rispetto a lui con velocità  $v$ , e quella destra allontanarsi con la stessa velocità. Poiché si è assunto che la velocità della luce è la stessa per entrambi gli osservatori, B vedrà l'impulso luminoso raggiungere la parete di sinistra in un tempo (si veda il prossimo paragrafo)

$$t_s = \frac{l}{c + v}, \quad (7)$$

<sup>8</sup> Il postulato qui riportato viene di solito detto secondo postulato della relatività ristretta e fu originariamente formulato come segue: *la velocità della luce nel vuoto è uguale in tutte le direzioni e in ogni regione di un dato sistema di riferimento, e uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali*

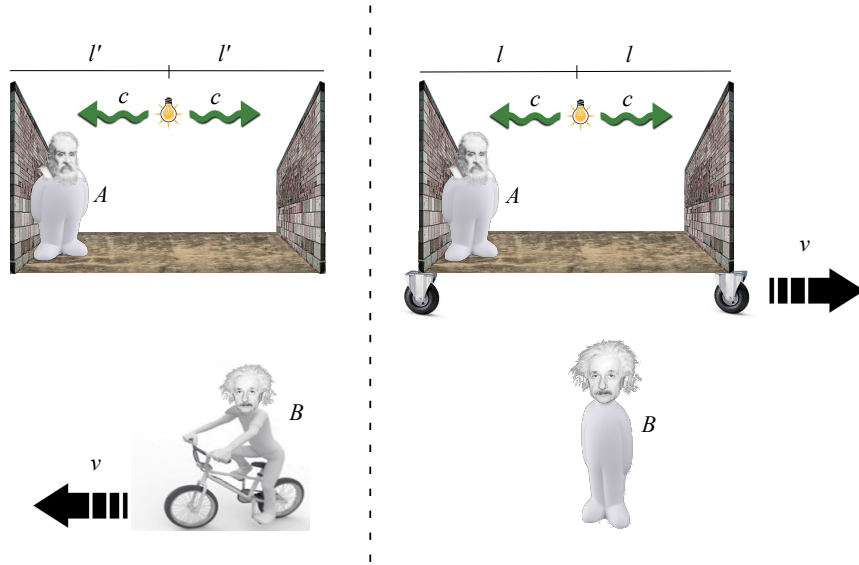


Fig. 3: Schema dell'esperimento concettuale sulla relatività della simultaneità. Le lunghezze viste dall'osservatore fermo e da quello in moto sono indicate diversamente perché non sono le stesse per i due osservatori (si veda nel seguito).

e quella destra in un tempo

$$t_d = \frac{l}{c - v}. \quad (8)$$

Per l'osservatore in moto i due eventi non sono più simultanei e la differenza tra i due tempi è

$$t_d - t_s = \frac{2lv}{c^2 - v^2}. \quad (9)$$

Applicando le considerazioni precedenti possiamo dedurre che un osservatore posto all'esterno di un vagone ferroviario in moto costante (si veda la Fig. 4), che osservi allo stesso istante due orologi posti all'estremità del vagone, vede segnare ore diverse, con l'orologio di sinistra in anticipo rispetto all'altro. La cosa non è affatto sorprendente: l'osservatore esterno, infatti, vede un ipotetico raggio luminoso in moto dal centro del vagone raggiungere la parete di sinistra prima di quello diretto verso destra, poichè la parete di sinistra si avvicina alla sorgente di luce, mentre quella di destra si allontana.

Vedremo ora come l'uso del solo assioma sulla invarianza della velocità della luce implichi la dilatazione dei tempi e la contrazione delle distanze in sistemi di riferimento diversi. Consideriamo quanto mostrato in Fig. 5: una sorgente di luce posta sul pavimento di un vagone in moto sul cui soffitto è posizionato uno specchio. Un raggio di luce emesso dalla sorgente viene riflesso dallo specchio eseguendo un tragitto completo in un tempo

$$T_A = 2 \frac{h}{c} \quad (10)$$

dove  $h$  è l'altezza del vagone. Il pedice A indica le variabili misurate dall'osservatore solidale con il vagone. Un osservatore esterno B, supposto fermo, causa l'invarianza della velocità della

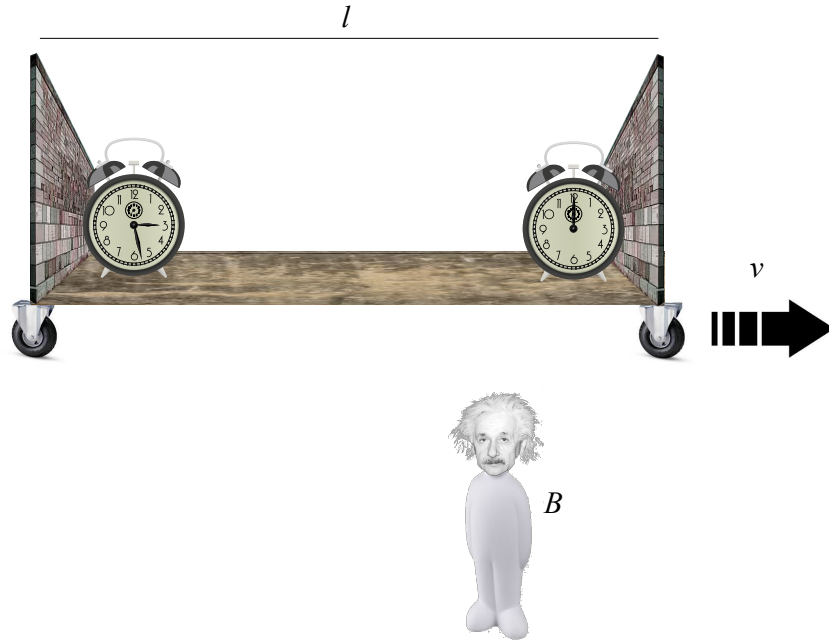


Fig. 4: Perdita della simultaneità per un osservatore esterno ad un sistema in moto.

luce<sup>9</sup>, dedurrà il periodo di andata e ritorno tramite la seguente equazione

$$(v t_B)^2 + h^2 = (c t_B)^2, \quad T_B = 2 t_B \quad (11)$$

dove  $t_B$  è il tempo impiegato dalla luce per raggiungere lo specchio. Tale tempo è dato da

$$t_B = \frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (12)$$

e, quindi

$$T_B = \gamma T_A \quad (13)$$

dove si è introdotto il cosiddetto *fattore relativistico*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (14)$$

Poiché  $v < c$ , risulta  $\gamma > 0$ , e, quindi, per l'osservatore esterno B il periodo di andata e ritorno è maggiore di quello misurato dall'osservatore A, solidale con il vagone; ovvero il ritmo dell'orologio dell'osservatore in moto (A) appare rallentato all'osservatore fisso (B): in ciò consiste il ben noto fenomeno della **dilatazione temporale**.

Si ricordi che, nel discutere l'esempio della perdita di simultaneità in due differenti sistemi inerziali, abbiamo lasciato aperta la possibilità che le lunghezze, misurate nei due sistemi di riferimento, non fossero le stesse. L'esempio seguente mostra come, in conseguenza del postulato fondamentale, le lunghezze viste dall'osservatore fisso B, risultino **contratte** rispetto a quelle dell'osservatore

<sup>9</sup> Se applicassimo le regole della meccanica classica dovremmo comporre la velocità della luce con quella del treno in modo da avere  $c' = \sqrt{c^2 + v^2}$ .

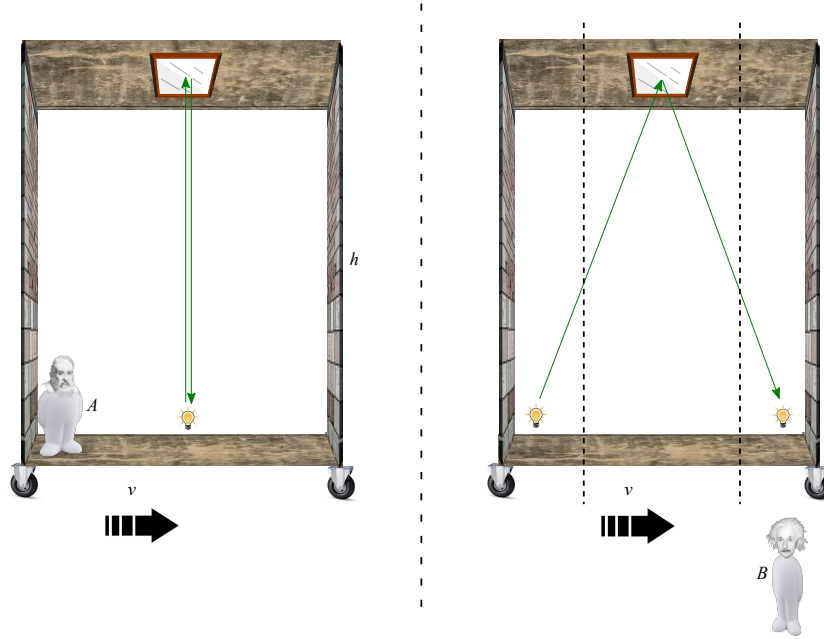


Fig. 5: Esperimento concettuale relativo alla dilatazione dei tempi.

A, solidale con il vagone (si veda la Fig. 6) e in moto rispetto a B. L'osservatore A misura un tempo di andata e ritorno di un raggio luminoso all'interno del vagone pari a

$$T_A = 2 \frac{L_A}{c} \quad (15)$$

mentre l'osservatore esterno misurerà un intervallo di tempo che otterremo ripetendo il ragionamento utilizzato per la derivazione della eq. (5). Poiché la velocità della luce è assunta essere invariante, l'osservatore B all'andata misurerà una velocità relativa luce-specchio pari a  $c - v$ , mentre al ritorno tale velocità risulterà essere  $c + v$ , e, quindi, il tempo di andata e ritorno sarà

$$T_B = \frac{L_B}{c - v} + \frac{L_B}{c + v} = 2\gamma^2 \frac{L_B}{c}, \quad (16)$$

e, quindi, tenendo conto delle equazioni (14) e (15), risulta

$$2\gamma \frac{L_B}{c} = 2 \frac{L_A}{c}, \quad (17)$$

ovvero

$$L_B = \frac{L_A}{\gamma}. \quad (18)$$

Pertanto la lunghezza misurata dall'osservatore esterno risulta contratta di un fattore  $\gamma$  rispetto a quella misurata dall'osservatore all'interno del vagone

Al pari della dilatazione dei tempi, l'idea della contrazione delle lunghezze non è facile da digerire. Si potrebbe inoltre pensare che a una dilatazione dei tempi debba corrispondere una dilatazione delle lunghezze. L'utilizzo dell'eq. (13) sembrerebbe suggerire che

$$\frac{L_B}{c} = \gamma \frac{L_A}{c},$$

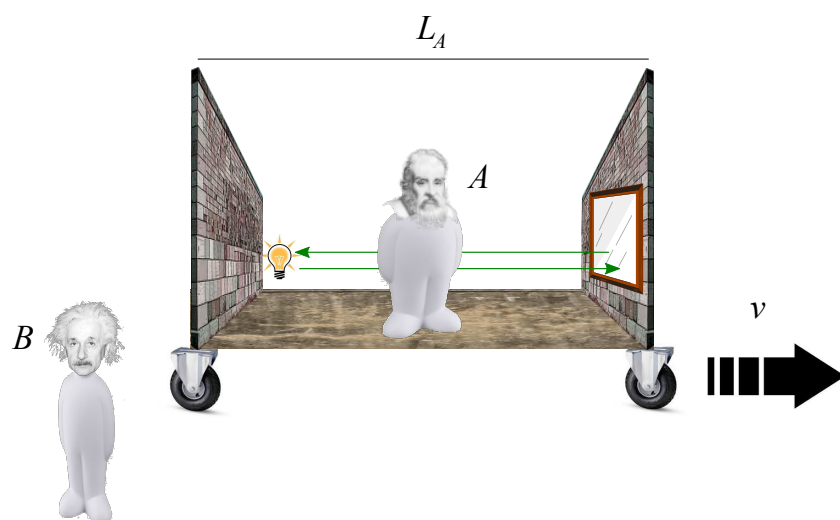


Fig. 6: Esperimento concettuale sulla contrazione delle lunghezze.  $L_B$  indica la lunghezza del vagone misurata da B.

in totale contrasto con la (18). Allo scopo di dissipare ogni dubbio, notiamo che la (13) è il risultato di un “esperimento” che non implica alcuna misura di lunghezza: l’osservatore A rileva il flash luminoso nel medesimo punto da cui è partito, e, quindi, solo un intervallo temporale. È inoltre opportuno notare che la struttura logica dei precedenti esperimenti concettuali è tale che non avremmo potuto dedurre la contrazione delle lunghezze tramite lo “apparato sperimentale” di Fig. 6 se non avessimo derivato in precedenza la dilatazione dei tempi.

Un esempio che consente di comprendere meglio la dualità dei fenomeni è quello descritto di seguito. Consideriamo un’astronave che viaggia alla velocità  $v$  verso una destinazione che dista  $L$  dalla base di partenza. L’equipaggio sull’astronave vedrà la distanza accorciata di un fattore  $\gamma$ , e, pertanto, impiegherà un tempo  $T_0 = L/(\gamma v)$ , ovvero ridotto di un fattore  $\gamma$  rispetto a quello misurato da un osservatore esterno, che risulta essere in moto rispetto all’astronave. Questo esempio verrà ripreso più avanti per discutere uno dei paradossi più noti della Relatività Ristretta.

Un ulteriore esempio, che discuteremo con maggior dettaglio nella sezione 2, è quello del decadimento del muone, una particella instabile con una vita media di  $1.5 \mu s$ . Una volta prodotti nell’alta atmosfera, grazie all’interazione con raggi cosmici molto energetici, i muoni raggiungono una velocità di circa  $0.994c$ . A tale velocità, essi percorrerebbero, nel loro tempo di vita medio, circa 447 m, e, quindi, al livello del mare si osserverebbero molti meno muoni di quelli che effettivamente si osservano perché una frazione significativa sarebbe decaduta in volo. Il fattore di dilatazione temporale (o equivalentemente di contrazione spaziale) alla velocità dei muoni è circa 9.14 e pertanto possiamo aspettarci che essi percorrano una distanza (nel sistema di riferimento terrestre) superiore ai 4 km.

Tutto quanto discusso in questo paragrafo riguarda una serie di esperimenti concettuali dai quali si evince che l’assunzione della costanza della velocità della luce in differenti sistemi inerziali comporta risultati apparentemente paradossali. Questo assunto implica che la concezione Galileiana del moto vada rivista e che le trasformazioni, riportate nelle eq. (1), vadano modificate in

modo da rendere conto delle “evidenze sperimentali” fin qui riportate.

## 1.2 Le trasformazioni di Lorentz

Nel paragrafo precedente abbiamo concluso che l’assioma relativo alla invarianza della velocità della luce implica che le lunghezze e il ritmo con cui fluisce il tempo dipendono dal sistema di riferimento. L’ovvia conclusione da trarre è che le ordinarie trasformazioni galileiane che legano due sistemi di riferimento con differenti velocità “relative” non sono adeguate a descrivere i processi fisici una volta assunto che la velocità della luce sia la stessa in entrambi i sistemi di riferimento.

Dovremo dunque trovare un insieme di trasformazioni per le quali risulti

$$c = c \& v \quad (19)$$

dove con l’operatore  $\&$  abbiamo indicato una sorta di composizione delle velocità non semplicemente additiva.

Dalle considerazioni precedenti segue che le nuove trasformazioni dovranno trattare le coordinate spaziali e temporali allo stesso modo. Assumeremo inoltre che:

- esse siano una generalizzazioni di quelle galileiane e si riducano a queste sotto certi limiti da specificare;
- agiscano solo lungo la direzione della velocità relativa tra i riferimenti e lascino inalterate le coordinate (spaziali) ortogonali a tale direzione.

In termini assolutamente generali, assumendo che le trasformazioni tra sistemi siano lineari, potremo scrivere che:

$$x' = A x + B t, \quad t' = C t + D x. \quad (20)$$

I coefficienti  $A, B, C, D$  possono essere determinati in vari modi. Innanzitutto, ricordiamo che le trasformazioni devono rendere conto della contrazione delle lunghezze, della dilatazione dei tempi e della relatività della simultaneità. Supponendo di essere nell’origine del sistema  $S$  (ovvero,  $x = 0$ ), dovremo osservare una dilatazione temporale, per cui deve essere  $C = \gamma$ . Invece, posto  $t = 0$  in  $S$ , la contrazione delle lunghezze porta a concludere che  $x$  è ridotta di un fattore  $\gamma$  rispetto a  $x'$ , per cui deve essere  $A = \gamma$ . Inoltre, nel limite  $v \rightarrow 0$ , ovvero  $\gamma \rightarrow 1$ , le trasformazioni (20) devono ridursi a quelle Galileiane in eq. (1), il che implica  $B = \gamma v$ , e  $D = 0$ . Inoltre, per omogeneità della seconda delle (20), il coefficiente  $D$  deve avere le dimensioni dell’inverso di una velocità. Sostituendo le espressioni dei coefficienti così determinati nelle (20), risulta:

$$x' = \gamma (x - v t), \quad t' = \gamma t + D x, \quad (21)$$

le quali possono essere riscritte nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (22)$$

con

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ D & \gamma \end{pmatrix}. \quad (23)$$



Il determinante di questa matrice è dato da

$$\Delta = \det L = \gamma^2 + \gamma v D \quad (24)$$

da cui, imponendo la condizione  $\Delta = 1$ , ovvero che la trasformazione di Lorentz sia unimodulare, otteniamo

$$D = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} = -\gamma \frac{v}{c^2}. \quad (25)$$

In conclusione, per la trasformazione  $S \rightarrow S'$  avremo

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - v t) \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right), \end{aligned} \quad (26)$$

mentre, per quella inversa  $S' \rightarrow S$

$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + v t') \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right). \end{aligned} \quad (27)$$

In generale per passare da un sistema di riferimento A ad uno B utilizzeremo la trasformazione  $x_B = \gamma (x_A \pm v t_A)$  ed è piuttosto facile confondersi sulla scelta dei segni. La seguente regola pratica può essere utilizzata per evitare problemi: *dal punto di vista del sistema B si sceglierà il segno “+” se individuando un punto nel sistema A, questo si muove verso destra; viceversa il segno “-” se il punto scelto si muove verso sinistra.*

Poiché la velocità è definita come rapporto tra la variazione spaziale e quella temporale, dalla (26) avremo

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \\ &= \frac{u - v}{1 - \frac{v u}{c^2}}, \end{aligned} \quad (28)$$

dove  $u = \Delta x / \Delta t$ . Non è difficile comprendere che la composizione di velocità data dalla (28) è tale che se  $u = c$  allora  $u' = c$  e, quindi, essa realizza la legge di associazione non additiva “&” che cercavamo. Occorre notare che le trasformazioni da noi effettuate riguardano il caso in cui i due sistemi di riferimento si muovano parallelamente, e pertanto le coordinate trasverse non sono modificate dalle trasformazioni di Lorentz. Così non è nel caso della velocità in conseguenza della trasformazione della variabile temporale. Supponendo che la velocità relativa  $v$  tra i riferimenti sia diretta lungo l’asse  $x$ , si ha:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left( 1 - \frac{v u_x}{c^2} \right)}. \quad (29)$$

Ulteriori commenti potranno essere trovati nella sezione 2.

È facile sincerarsi del fatto che l’assunzione della unimodularità della trasformazione di Lorentz comporta la seguente relazione di invarianza

$$(c t')^2 - (x')^2 = (c t)^2 - x^2, \quad (30)$$

che, come discuteremo più diffusamente nel seguito, da un punto di vista geometrico rappresenta la conservazione di una “norma” non euclidea. Il significato fisico della unimodularità è estremamente profondo e sarà anch’esso oggetto di approfondita discussione nei paragrafi successivi.

La condizione d’invarianza (30) consente di ricavare molto semplicemente il fenomeno della dilatazione delle scale temporali. Consideriamo un punto materiale fermo nel riferimento  $S$ , dove sarà individuato dalle coordinate  $(t, 0)$ . Lo stesso punto materiale, nel sistema  $S'$ , in moto con velocità  $v$  rispetto a  $S$ , sarà individuato dalle coordinate  $(t', vt')$ . In base alla (30), risulta

$$(ct)^2 = (ct')^2 - (vt')^2, \quad (31)$$

da cui, risolvendo rispetto a  $t'$ , otteniamo  $t' = \gamma t$ . Torneremo con maggiore dettaglio su questo punto nel seguito.

Per quanto concerne la contrazione delle lunghezze, potremo ragionare come segue. Considerata un’asta di lunghezza  $L' = x'_2 - x'_1$ , ferma nel riferimento  $S'$ , rileviamo nel riferimento  $S$  le coordinate spaziali  $x_{1,2}$  dei suoi estremi “simultaneamente”, diciamo all’istante  $t = 0$ . Dalla seconda della (26), si ha  $x'_{1,2} = \gamma x_{1,2}$ , ovvero:

$$L' = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L, \quad (32)$$

e, quindi, poiché l’asta è ferma nel sistema  $S'$ , riotteniamo che rispetto all’osservatore per il quale l’asta è in moto, la lunghezza di questa risulta contratta di un fattore  $\gamma$  rispetto a quella nel suo sistema di quiete. Si noti che la misura degli estremi in  $S$  viene fatta simultaneamente; lo stesso non avviene in  $S'$ , dove la misura delle coordinate degli estremi dell’asta viene eseguita a tempi diversi, ovvero, imponendo  $t = 0$  nella prima della (27), agli istanti<sup>10</sup>

$$t'_{1,2} = -\gamma \frac{v}{c^2} x_{1,2}. \quad (33)$$

Prima di concludere torniamo alle eq. (7) e (8), utilizzate per stabilire la relatività del concetto di simultaneità. Poiché il tempo in cui parete e raggio luminoso si incontrano dipende dalla composizione della velocità della luce di quella dell’osservatore, in base alla (28) potremmo presumere che in entrambi i denominatori debba comparire  $c$ . Le cose non stanno così, e, infatti, il risultato ottenuto non contiene una composizione di velocità nel senso relativistico del termine, ovvero di composizione  $v_1 \& v_2$ . Per chiarire cosa intendiamo, calcoliamo quanto tempo impiegano ad incontrarsi due punti materiali, inizialmente a una distanza  $L$ , in moto uno verso l’altro con velocità  $v_1$  e  $v_2$ , rispettivamente. Evitando il ricorso alla meccanica relativistica, notiamo che, indicato con  $T$  tale tempo, la soluzione al nostro problema è fornita dalla seguente equazione:

$$v_1 T = L - v_2 T, \quad (34)$$

da cui si ottiene

$$T = \frac{L}{v_1 + v_2}. \quad (35)$$

È evidente che, da un punto di vista concettuale, non abbiamo fatto ricorso alla somma di velocità intesa come composizione di velocità.

Da un punto di vista relativistico il problema si risolve sostanzialmente allo stesso modo, ovvero tramite la seguente identità

$$\gamma_2 v_1 T = \gamma_2 (L - v_2 T) \quad (36)$$

---

<sup>10</sup> Il segno negativo può risultare oscuro, ma l’interpretazione geometrica degli effetti relativistici, che forniremo nei paragrafi successivi, fugherà - si spera - ogni dubbio.

dove

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}, \quad (37)$$

su cui invitiamo il lettore a riflettere.

Abbiamo fin qui dimostrato che le trasformazioni di Lorentz sono compatibili con i ragionamenti ispirati ad esperimenti ideali discussi nel paragrafo introduttivo. Il prossimo paragrafo è dedicato ad alcune precisazioni in merito ai postulati della relatività ristretta.

### 1.3 I postulati della Relatività Ristretta

La discussione fin qui svolta potrebbe dare l'impressione che l'impianto della relatività ristretta sia derivabile dall'unico postulato concernente la costanza della velocità della luce nei diversi sistemi di riferimento inerziali. Il postulato, in termini più "moderni", potrebbe essere formulato dicendo che esiste una velocità massima di comunicazione (interazione), che è la stessa in tutti i sistemi inerziali. È opportuno commentare ulteriormente quest'ultimo punto notando che i concetti sviluppati in precedenza rimangono validi se si assume l'esistenza di una velocità limite, che non sia quella della luce nel vuoto. L'assunto che tale velocità sia proprio  $c$  nasce dalla constatazione che essa è la velocità limite della trasmissione delle interazioni.

Il postulato in questione non è comunque sufficiente per giustificare il tessuto logico della relatività ristretta e dovremo fare un'aggiunta, assumendo che:<sup>11</sup>

**tutti i sistemi inerziali sono equivalenti**

Nella precedente analisi abbiamo dato l'impressione che sistema in moto e sistema dell'osservatore fisso fossero distinti. Le cose non stanno così e l'ulteriore postulato implica che gli osservatori, nei propri sistemi di riferimento, deducano le medesime conseguenze. Pertanto ciascuno di essi nel proprio sistema inerziale, in moto l'uno rispetto all'altro, vedranno una dilatazione dei tempi ed una contrazione delle lunghezze. La struttura matematica delle trasformazioni di Lorentz è tale da contenere implicitamente tale principio. Il determinante della matrice di trasformazione è, infatti, unitario, il che implica che le trasformazioni siano invertibili lasciando invariata la metrica.

Come già sottolineato la relatività ristretta è fonte, proprio per la sua natura controintuitiva, di paradossi che sono appunto legati alla contrazione delle lunghezze e alla dilatazione dei tempi, ma anche alla reciprocità di tali fenomeni. L'analisi di tali paradossi, supposti e non, è essenziale per penetrare l'intima natura della teoria stessa. Consideriamo un esempio: un'astronave che intraprenda un viaggio per raggiungere un pianeta, a una distanza di 1 anno luce da quello di partenza; ci chiediamo quale debba essere la velocità di crociera  $v$  dell'astronave perché compia, nel proprio sistema di riferimento, il viaggio in 0.5 anni luce. I membri dell'equipaggio della nave vedranno la distanza tra i pianeti ridotta di un fattore  $\gamma$ , e, pertanto, il tempo di viaggio misurato nell'astronave sarà pertanto

$$T_A = \frac{L}{v \gamma}$$

<sup>11</sup> Il postulato cui si fa riferimento come primo postulato della relatività ristretta, fu originariamente formulato come *tutti i fenomeni fisici identici si manifestano nello stesso modo nei sistemi di riferimento inerziali a parità di condizioni iniziali*.

che, posto  $T_0 = L/c$ , può essere riscritta come

$$\beta T_A = \sqrt{1 - \beta^2} T_0$$

da cui, posto  $T_A = m T_0$ , si ottiene

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + m^2}},$$

ovvero, nel caso specifico di  $m = 0.5$ ,  $v = (2/\sqrt{5})c$ . Si potrebbe essere indotti a ritenere che i membri dell'equipaggio, avendo sperimentato un tempo ridotto, siano, una volta giunti sul pianeta, più giovani di chi è rimasto a casa. Scartiamo subito questa ipotesi: per gli astronauti, chi è rimasto a casa si è mosso, con la stessa velocità  $v$ , sebbene in direzione opposta. Dunque, sebbene a volte spacciato per paradosso, non abbiamo a che fare con alcun risultato paradossale. Quello che abbiamo appena discusso è una delle tante possibili versioni del cosiddetto *paradosso dei gemelli*, molto spesso citato e inteso in maniera non corretta. In estrema sintesi la questione viene così formulata: il gemello A intraprende un viaggio extragalattico con una astronave che si muove a velocità  $v$ , lasciando a terra il fratello B. Il gemello fermo vedrà scorrere il tempo di A più lentamente; quando A sarà tornato, troverà B invecchiato rispetto a lui. A volte si pensa che questo sia il paradosso, che però consiste nel fatto che, applicando il secondo postulato, anche il fratello B avrà visto, nel suo sistema di riferimento, A muoversi con la stessa velocità (in modulo): una volta l'uno di fronte all'altro dovrebbero avere la stessa età. Il fratello che ha viaggiato è però più giovane, il paradosso sta proprio in questo.

La risoluzione del paradosso sta nel fatto che il sistema di riferimento del gemello A non è inerziale. Egli, infatti, ha dovuto accelerare per portarsi ad una velocità  $v$  e decelerare per tornare indietro e fermarsi. Tale osservazione risolve il paradosso, ma non spiega perché il gemello B, che non ha subito alcuna accelerazione, è invecchiato più in fretta. Torneremo su questo punto paragrafo 1.6, dove discuteremo vari paradossi (o presunti tali) associati alla teoria della relatività ristretta.

## 1.4 I diagrammi di Minkowski

Uno strumento di notevole utilità per visualizzare la “fenomenologia” della Relatività Ristretta è costituito dai diagrammi di Minkowski, detti anche diagrammi “spazio-temporali”.

Nei paragrafi precedenti abbiamo fatto riferimento a sistemi inerziali in moto relativo con velocità costante. Pur avendo appreso che le coordinate spaziali e quella temporale non sono indipendenti, abbiamo visualizzato i sistemi di riferimento  $S$ ,  $S'$  tramite ordinarie terne cartesiane (si veda la Fig. 1) senza alcun riferimento ai tempi. Un modo per introdurre la variabile temporale è quello di riportare gli eventi relativi a  $S$  sul piano - di Minkowski -  $(x, \tau = ct)$ , dove con  $x$  si intende la coordinata lungo la direzione in cui si sviluppa il moto del sistema  $(x', \tau = ct')$ , associato a  $S'$ . Una volta rappresentato il piano di Minkowski relativo a  $S$  tramite un ordinario diagramma cartesiano (cfr il riquadro di sinistra di Fig. 7), occorre stabilire come vadano sistemati, rispetto agli assi di questo, quelli del piano corrispondente a  $S'$ . L'asse temporale  $\tau'$  è determinato dalla condizione  $x' = 0$ , per cui, in base alle trasformazioni di Lorentz, nel piano  $(x, \tau)$  sarà descritto dalla retta di equazione

$$\tau = \frac{1}{\beta} x \quad (38)$$

la quale forma con la direzione positiva dell'asse  $\tau$  un angolo

$$\theta = \arctan \beta \quad (39)$$

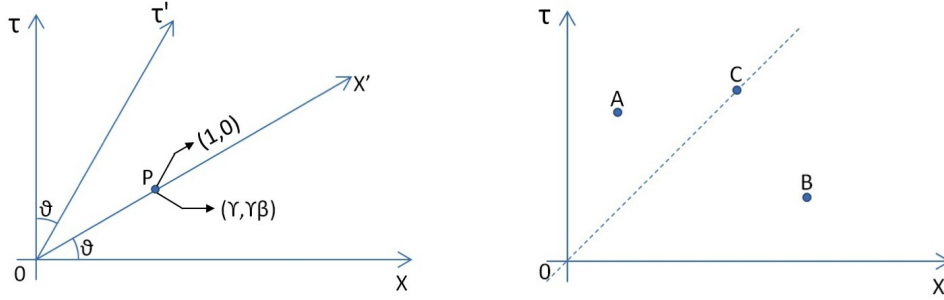


Fig. 7: Diagrammi di Minkowski per i riferimenti inerziali  $S$  e  $S'$  (sinistra). Lo stesso punto  $P$ , di coordinate  $(1, 0)$  in  $S'$ , ha coordinate  $(\gamma, \gamma\beta)$  in  $S$ . Diversa tipologia degli eventi in base alla loro posizione rispetto alla bisettrice del piano di Minkowski (destra).

L'asse spaziale  $x'$ , essendo definito dalla condizione  $\tau' = 0$  è, invece, rappresentato dalla retta

$$\tau = \beta x \quad (40)$$

che forma un angolo  $\theta$  con la direzione positiva dell'asse  $x$ .

Nel riquadro di destra di Fig. 7, con la retta tratteggiata abbiamo indicato la bisettrice del piano  $(x, \tau)$ , ovvero la retta  $\tau = x$ . Essa consente di stabilire la natura dei punti (eventi) nel piano. I punti A, B e C disegnati in figura, rappresentano, infatti, eventi completamente diversi: il punto A è legato all'origine da una retta di coefficiente angolare  $1/\beta > 1$ , ovvero  $\beta < 1$ , e, dunque, rappresenta un evento “causalmente” connesso all'origine con un segnale che si propaga a velocità minore di  $c$ ; il punto B non è causalmente connesso all'origine perché il coefficiente angolare della retta che lo congiunge all'origine è  $1/\beta < 1$ , e, pertanto,  $\beta > 1$ . Infine, i punti sulla bisettrice sono tutti connessi da segnali che si propagano alla velocità della luce. Inoltre, al punto  $A \equiv (x_A, \tau_A)$  risulta associato l'invariante  $s_A^2 = \tau_A^2 - x_A^2 > 0$ , mentre per gli altri due punti risulta  $s_B^2 < 0$  e  $s_C^2 = 0$ . Ritorneremo su questo aspetto del problema nel seguito. Per il momento, ci limitiamo ad adottare la seguente classificazione:

$$s^2 = \tau^2 - x^2 \begin{cases} > 0 & \text{time - like} \\ = 0 & \text{light - like} \\ < 0 & \text{space - like} \end{cases} \quad (41)$$

La strategia che stiamo sviluppando è quella di definire alcuni degli aspetti fondamentali della cinematica relativistica i termini di geometria analitica. La cosa può nascondere qualche insidia e alcuni punti vanno chiariti in anticipo. Come abbiamo già sottolineato, le trasformazioni di Lorentz non conservano la norma euclidea, ovvero nel passaggio da un riferimento ad un altro le lunghezze geometriche non sono conservate. Pertanto le unità di misura definite in  $S'$  non coincidono con quelle in  $S$ , e, quindi, occorre stabilire un criterio di confronto. Torniamo al riquadro di destra nella Fig. 7. Il punto P di coordinate  $(1, 0)$  nel sistema  $S'$  rappresenta l'unità di lunghezza spaziale in tale riferimento. Questo punto, nel riferimento  $S$  possiede coordinate  $(\gamma, \gamma\beta)$ , per cui, poiché le coordinate dell'origine sono le stesse nei due riferimenti, la distanza OP - nel senso euclideo del termine - nel riferimento  $S$  risulta essere  $\gamma\sqrt{1 + \beta^2}$ . Ciò significa che

tra le unità di lunghezza nei due sistemi sussiste la relazione<sup>12</sup>

$$\frac{\text{un}(S')}{\text{un}(S)} = \gamma \sqrt{1 + \beta^2} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}, \quad (42)$$

e, quindi, a una lunghezza  $L'$  in unità di lunghezza di  $S'$  corrisponde una lunghezza

$$\bar{L} = \frac{L'}{\gamma \sqrt{1 + \beta^2}} = L' \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}} \quad (43)$$

in unità di lunghezza di  $S$ .

Consideriamo ora una retta  $r'$  parallela all'asse temporale di  $S'$  che incrocia l'asse  $x'$  in un punto  $I'$  di coordinate (cfr Fig. 8)  $(L' \cos \theta, L' \sin \theta)$  nel sistema  $S$ . In base alla (38), e tenendo conto

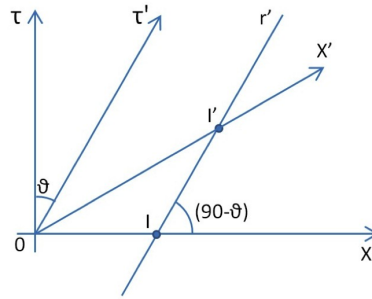


Fig. 8: Diagrammi di Minkowski e interpretazione geometrica della contrazione delle lunghezze.

La retta  $r'$  passante per l'estremo superiore del punto  $P$  incrocia l'asse delle  $x$  nel punto  $I'$ ; il segmento  $OI'$  è la lunghezza contratta del segmento  $OI$  nel sistema  $S'$ .

della relazione (39), l'equazione di tale retta risulta essere

$$\tau = \frac{1}{\beta} x - \frac{L'}{\beta} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (44)$$

per cui essa interseca l'asse delle  $x$  nel punto

$$I \equiv \left( L' \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}}, 0 \right) = \left( \frac{\bar{L}}{\gamma}, 0 \right). \quad (45)$$

Questo risultato rappresenta l'interpretazione geometrica, in termini di diagrammi di Minkowski, della contrazione delle lunghezze.

Lo stesso ragionamento ci porta a definire geometricamente la dilatazione delle scale temporali, come indicato in Fig. 9, dalla quale si evince che  $\delta' = \gamma \delta$ , ovvero il “tempo” nel riferimento in moto risulta dilatato del solito fattore relativistico rispetto quello misurato nel riferimento in quiete. Per ulteriori commenti al riguardo, si vedano gli esercizi in sezione 2.

Dalla discussione precedente abbiamo acquisito le seguenti informazioni:

<sup>12</sup> Ovvero, tenendo conto della (39)

$$\frac{\text{un}(S')}{\text{un}(S)} = \sqrt{\sec(2\theta)}.$$

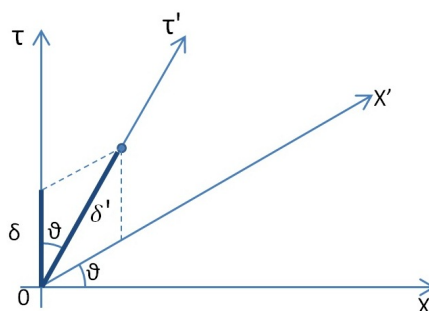
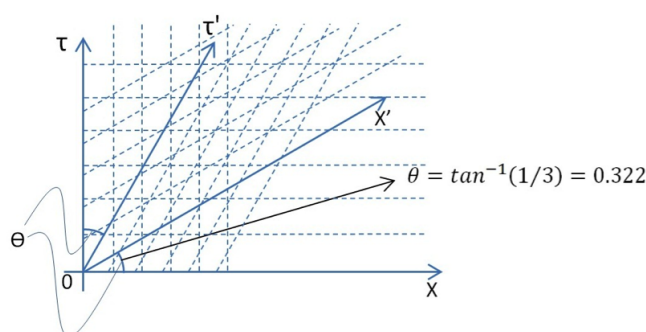


Fig. 9: Interpretazione geometrica della dilazione temporale.

- il parametro  $\beta$  è legato all'inclinazione degli assi del sistema di riferimento in moto rispetto a quelli del sistema fisso;
- le coordinate relative ai due sistemi di riferimento si dispongono su “griglie” diverse (cfr Fig. 10);
- la nozione di simultaneità acquisisce una interpretazione molto trasparente (cfr Fig. 11), dalla quale risulta anche chiaro che in  $S'$  l'evento B è in anticipo rispetto ad A; si nota, inoltre, che spostando il segmento AB parallelamente a se stesso verso il basso, il corrispondente segmento  $A'B'$  si sposta verso la zona dei tempi negativi (cfr Eq. (33)).

Fig. 10: Diagrammi spaziotemporali per due sistemi di riferimento inerziali in moto con velocità relativa uguale a  $c/3$ .

L'interpretazione geometrica che abbiamo discusso in questo paragrafo è utile ma non particolarmente pratica. Essa permette una visualizzazione qualitativa dei concetti prima sviluppati, ma risulta piuttosto macchinosa ai fini del conseguimento di risultati quantitativi. Nel prossimo paragrafo discuteremo un diverso punto di vista geometrico, basato sull'utilizzo della trigonometria iperbolica.

#### 1.4.1 Trigonometria iperbolica e Relatività Ristretta

La struttura delle trasformazioni di Lorentz è tale da ricordare una sorta di rotazione, ma poiché essa non conserva la norma euclidea non può essere considerata una rotazione nel senso stretto

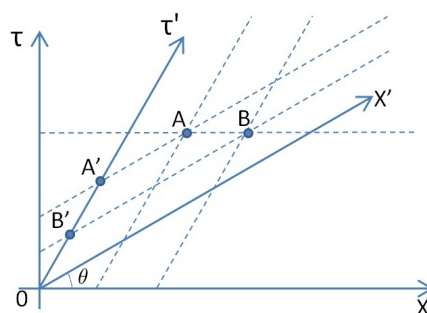


Fig. 11: Interpretazione geometrica della non simultaneità degli eventi: gli eventi A e B contemporanei in  $S$ , non sono più tali in  $S'$ .

del termine. Una digressione su questo punto è necessaria. Il concetto di rotazione è più generale di quello che siamo abituati a pensare.

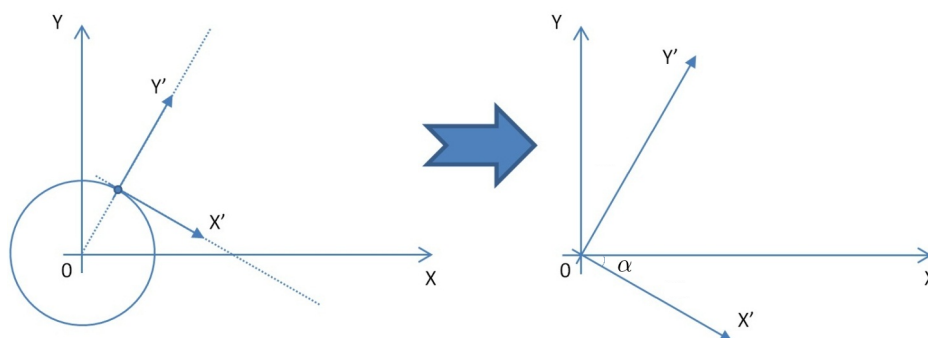


Fig. 12: Schema concettuale della rotazione circolare.

Consideriamo quanto illustrato in Fig. 12, dove viene preso in considerazione un punto P in moto su una circonferenza, riferita a un sistema di assi cartesiani  $(x, y)$  di origine O. Possiamo associare al punto un sistema “ruotato” definito prendendo come origine il punto stesso, come asse delle ascisse  $x'$  quello lungo la direzione OP, e come asse delle ordinate  $y'$  quello tangente alla circonferenza nel punto P. Il nuovo sistema di riferimento  $x'Py'$  così definito è ortogonale, e, dal punto di vista metrico, non cambia nulla se facciamo coincidere P con O. La trasformazione tra i due sistemi di riferimento è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (46)$$

A questo punto è ragionevole chiedersi se sia possibile estendere questa tipo di procedura anche alle altre coniche. In base a quanto illustrato prima, la rotazione può essere vista come il moto di un punto su un arco di circonferenza. Partendo da tale constatazione definiamo una *rotazione iperbolica* come il moto di un punto su un arco di iperbole. In Fig. 13 replichiamo al caso dell'iperbole il procedimento illustrato in Fig. 12, ovvero a un generico punto P su un arco di iperbole associamo due assi: uno lungo la congiungente con l'origine, e l'altro tangente alla conica nel punto P. A differenza del caso precedente, il nuovo sistema di assi non è più ortogonale, e



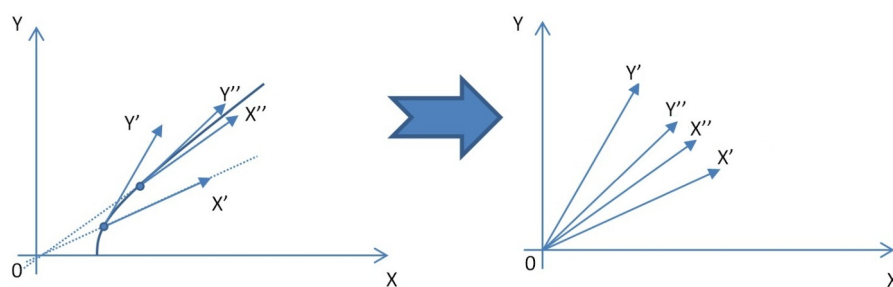
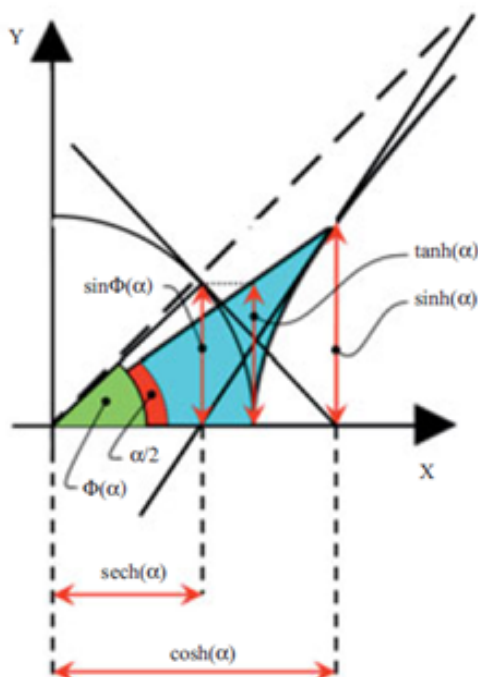


Fig. 13: Schema concettuale della rotazione iperbolica.

l'angolo di apertura diminuisce allo spostarsi del punto sull'arco. Se spostiamo rigidamente il sistema trasportando il punto P nell'origine del primo, otteniamo quanto mostrato in Fig. 13, che è equivalente alla disposizione degli assi nel piano di Minkowski. In termini matematici avremo che la rotazione iperbolica può essere così espressa:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (47)$$

dove, anche in questo caso,  $\alpha$  è l'angolo tra l'asse  $x$  e quello che ne risulta da questo in seguito alla rotazione. Per comodità del lettore, in Fig. 14 abbiamo riportato la definizione delle varie funzioni iperboliche, riferite all'iperbole trigonometrica  $x^2 - y^2 = 1$ . È importante osservare

Fig. 14: Definizione delle funzioni iperboliche (per la definizione di  $\Phi(\alpha)$  si veda la sezione 1.4.2).

che, a parte le ovvie differenze dovute alla non ortogonalità degli assi, la rotazione iperbolica è profondamente diversa da quella circolare: non possiamo passare con continuità da un ramo dell'iperbole all'altro, e non possiamo oltrepassare la linea di demarcazione rappresentata dagli asintoti dell'iperbole, che, nel caso di quella equilatera, sono associati alle bisettrici del sistema  $yOx$ .

Dalla eq. (26), è facile vedere che una trasformazione di Lorentz può essere scritta nella forma seguente

$$\begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Poiché risulta  $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$ , proviamo ad utilizzare la seguente identificazione:

$$\gamma = \cosh \alpha, \quad \gamma\beta = \sinh \alpha \quad (49)$$

In base a tale identificazione, la trasformazione di Lorentz  $(1, 0) \rightarrow (\gamma, \gamma\beta)$  può essere rappresentata come in Fig. 15), in cui un punto, inizialmente sull'asse  $x$ , viene trasportato lungo un arco d'iperbole. È opportuno notare che l'asse dell'iperbole coincide con la bisettrice del piano  $(x, \tau)$ , che corrisponde alla trasformazione di Lorentz per cui gli  $x'$  e  $\tau'$  formano un angolo nullo tra loro. Una successiva trasformazione è rappresentata da un ulteriore spostamento lungo l'iperbole. Due

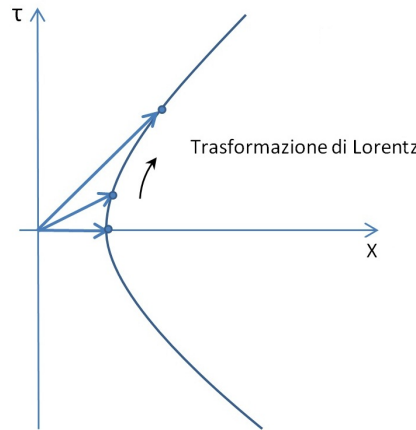


Fig. 15: Rappresentazione della trasformazione di Lorentz nel piano di Minkowski.

trasformazioni consecutive possono essere realizzate tramite il prodotto matriciale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sinh(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -\sinh(\alpha_1 + \alpha_2) & \cosh(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Vediamo ora come sia possibile riconciliare la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi con le speculazioni geometriche di questo paragrafo. Nella Fig. 16 riportiamo due archi di iperbole, al di sotto e al di sopra della bisettrice, e, dunque, relativi ad eventi di tipo spazio e di tipo tempo, rispettivamente. Consideriamo un punto P sull'arco inferiore e tracciamo la tangente

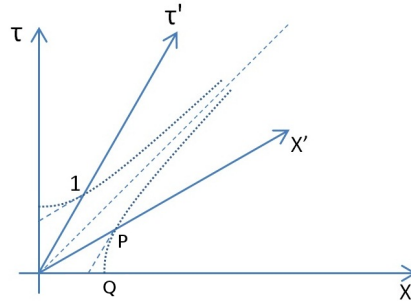


Fig. 16: Contrazione dei tempi e dilatazione dei tempi in termini di geometria iperbolica.

all'iperbole in tale punto. In base a quanto appreso sulle funzioni iperboliche, questa interseca l'asse  $x$  nel punto di ascissa (per semplicità supponiamo che il segmento  $OP$  sia di lunghezza unitaria)

$$\operatorname{sech} \alpha = \frac{1}{\gamma} \quad (51)$$

La lunghezza del segmento  $OQ$  può essere interpretata come la lunghezza contratta rispetto a quella nel sistema  $S'$  e come “proiezione iperbolica” del vettore  $OP$  (per maggiori dettagli si veda la sezione 2). Analoghe conclusioni possono essere raggiunte per la dilatazione dei tempi, come mostrato in figura.

Un importante punto da chiarire è il ruolo giocato dai due rami (superiore e inferiore) di iperboli. Ritorniamo, quindi, a quanto discusso in precedenza sugli eventi di tipo spazio e di tipo tempo, notando che (cfr Fig. 17):

- nella regione al di sopra della bisettrice, i punti rappresentativi di eventi (ad esempio, 1 e 2) possono essere connessi tramite una trasformazione di Lorentz che li collochi in un sistema inerziale in cui appaiono nella medesima posizione e dunque costituiscono un intervallo puramente temporale (regione *time-like*);
- nella regione inferiore sarà sempre possibile trovare una trasformazione per cui gli eventi (ad esempio, 3 e 4) sono simultanei ma collocati in posizioni diverse (regione *space-like*);
- per gli eventi lungo la bisettrice l'intervallo è sempre nullo e, pertanto, tale retta è *light-like*.

#### 1.4.2 Trigonometria circolare e Relatività Ristretta

Il legame tra trigonometria iperbolica e circolare viene fornito nella Fig. 18, da cui risultano evidenti le seguenti identificazioni

$$\cos(\Phi(\alpha)) = \operatorname{sech} \alpha, \quad \sin(\Phi(\alpha)) = \tanh(\alpha), \quad (52)$$

dove  $\Phi(\alpha)$  è l'angolo goniometrico corrispondente al settore  $\alpha$ ; la funzione  $\Phi(\alpha)$  è nota come *funzione di Gudermann*. Nel seguito, per semplicità di notazione, porremo  $\Phi(\alpha) = \varphi$  per cui avremo le seguenti identificazioni<sup>13</sup>

$$\beta = \sin \varphi, \quad \gamma = \sec \varphi, \quad \gamma \beta = \tan \varphi. \quad (53)$$

<sup>13</sup> Si noti che  $\sec^2 \varphi - \tan^2 \varphi = 1$ .

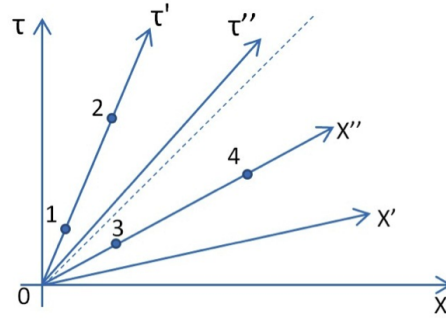


Fig. 17: Classificazione degli eventi nel piano di Minkowski.

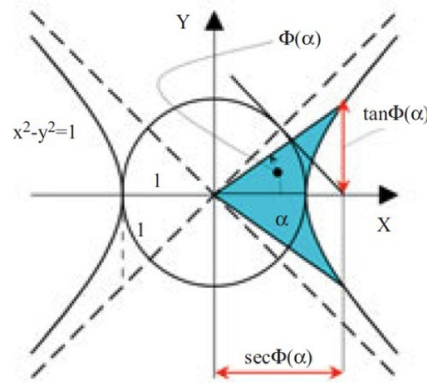


Fig. 18: Relazione tra la trigonometria iperbolica e quella circolare

e, quindi, le trasformazioni di Lorentz assumeranno la forma

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau \sec \varphi - x \tan \varphi \\ x' &= -\tan \varphi \tau + \sec \varphi x.\end{aligned}\tag{54}$$

L'utilizzo della trigonometria circolare è altrettanto efficiente ai fini della visualizzazione della fenomenologia relativistica, ma non insisteremo ulteriormente su questo punto.

Infine, nella Fig. 19 riportiamo una figura a colori apparsa in un manoscritto Minkowski, in cui viene illustrata la metodologia dei diagrammi spaziotemporali.

### 1.5 Trasformazioni di Lorentz e trasformazione degli angoli

Nei paragrafi precedenti abbiamo fatto riferimento al fatto che la “norma” del vettore posizione nello spaziotempo sia data da  $\tau^2 - x^2$ , e che risulta essere invariata per trasformazioni di Lorentz. In termini matematici meno vaghi, diremo che il vettore posizione nello spaziotempo di Minkowski è definito come il *quadrivettore* (*4-vettore*) di componenti

$$x_\mu \equiv (\tau, \vec{r}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).\tag{55}$$

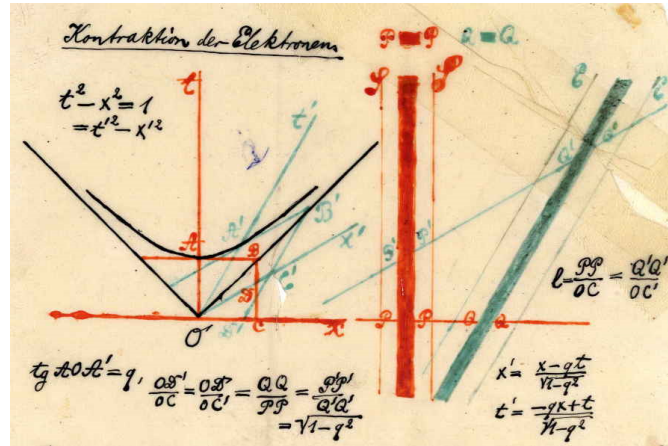


Fig. 19: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Math. Archiv 60: 2. Minkowski's, il manoscritto non è datato. (Per ulteriori informazioni si veda l'articolo di S. Walter: *Minkowski, Mathematicians and the Mathematical Theory of Relativity*, in H. Goenner, J. Renn, J. Ritter, and T. Sauer (eds.), in "The Expanding Worlds of General Relativity", Birkhäuser (1999)).

Tale forma viene detta *covariante*. Ad essa risulta associata anche una forma *controvariante*

$$x^\mu \equiv (\tau, -\vec{r}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (56)$$

tramite la quale è possibile definire un prodotto scalare

$$x^2 = x_\mu x^\mu = \tau^2 - \vec{r} \cdot \vec{r} = \tau^2 - |\vec{r}|^2 \quad (57)$$

che definisce la norma del 4-vettore.

Il prodotto scalare tra due 4-vettori diversi è definito nel modo seguente:

$$x_1 \cdot x_2 = x_{1\mu} x_2^\mu = \tau_1 \tau_2 - |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta. \quad (58)$$

Si dimostra facilmente che tale prodotto scalare è invariante per trasformazioni di Lorentz<sup>14</sup>, per cui risulta:

$$\tau_1 \tau_2 - |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta = \tau'_1 \tau'_2 - |\vec{r}'_1| |\vec{r}'_2| \cos \theta'. \quad (59)$$

da cui, tenendo conto della (52) segue che

$$\cos \theta' = - \frac{(\tau_1 \tau_2 - \tau'_1 \tau'_2) - |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos \theta}{|\vec{r}'_1| |\vec{r}'_2|}. \quad (60)$$

Il calcolo esplicito può essere semplificato considerando il caso della composizione delle velocità dei due sistemi con velocità  $u$  e  $v$  non parallele tra loro. Dalle eq. (29) otteniamo

$$u' \cos \theta' = \frac{u \cos \theta - \beta c}{1 - \beta \frac{u}{c} \cos \theta}, \quad u' \sin \theta' = \frac{u \sin \theta}{\gamma \left(1 - \beta \frac{u}{c} \cos \theta\right)}, \quad (61)$$

<sup>14</sup> A volte, per indicare che una quantità è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, si utilizza la locuzione "scalare di Lorentz".

che, nel caso in cui  $u = c = u'$ , si riducono alle

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}, \quad (62)$$

delle quali faremo ampio uso nel seguito.

## 1.6 La Relatività Ristretta e i suoi paradossi

In questo paragrafo metteremo a profitto quanto prima imparato analizzando quelli che vengono comunemente detti paradossi. La natura paradossale degli esempi che discuteremo è legata alla natura controintuitiva della relatività ristretta in merito ai concetti di spazio e di simultaneità. Il paradosso del granaio è in un certo senso paradigmatico. A tale scopo affronteremo, in maniera più profonda, il concetto di contrazione delle lunghezze. In Fig. 20 (dove per *worldtube* si intende l'estensione multidimensionale dell'insieme dei punti di una traiettoria nello spaziotempo) si mostra una sbarra nel sistema di riferimento di riposo e la sua "immagine" nel sistema di riferimento in moto. È altresì evidente che nei due sistemi di riferimento agli estremi della sbarra

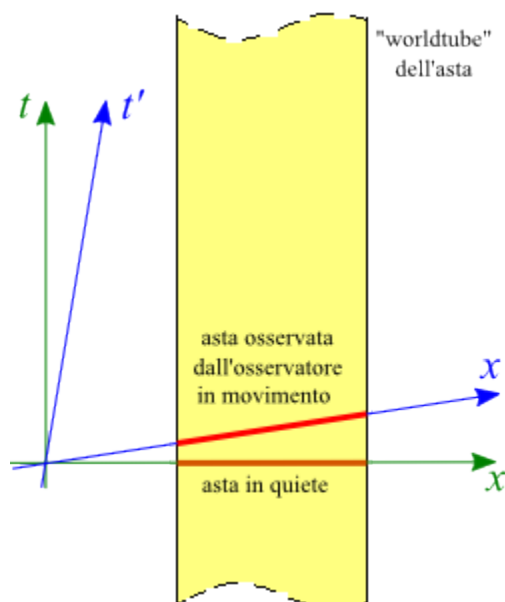


Fig. 20: Diagramma di Minkowski per la contrazione delle lunghezze.

corrispondono tempi diversi. Si potrebbe dunque concludere che la contrazione delle lunghezze è in un certo senso una conseguenza della perdita della simultaneità e che, dunque, i due osservatori misurano sbarre che sono composte da insiemi diversi di eventi.

Consideriamo un'asta lunga 20 m, nel proprio sistema di riferimento, e in moto ad una velocità di  $0.9c$ . Essendo  $\gamma = 2.29$  la lunghezza misurata da un osservatore fermo è ridotta a circa 8.73 m. Supponiamo ora che questa asta attraversi una regione tra due porte di un granaio separate da una distanza di 10 m. L'osservatore fisso vedrà, ad un certo istante, l'asta al centro tra le due porte. Nel sistema di riferimento dell'asta la distanza tra le due porte viene vista

contratta a una lunghezza di circa 4.37 m. Supponiamo ora che nell'istante in cui l'osservatore vede l'asta all'interno dell'intervallo tra le due porte decide di azionare un meccanismo che permetta di chiuderle entrambe "simultaneamente". Contestualmente l'asta, che nel suo sistema di riferimento risulta essere più lunga della separazione tra le porte si troverà in una situazione (apparentemente) non ben definita: ovvero non è chiaro se sia contenuta, o meno, nello spazio tra le due porte. È evidente che non abbiamo a che fare con un paradosso, ma, semplicemente, del fatto che non abbiamo tenuto correttamente conto dei principi della Relatività Ristretta. Assumeremo come sistema di riferimento fermo quello del granaio e le trasformazioni di Lorentz saranno eseguite trasformando gli eventi del granaio in quelli dell'asta. Gli estremi A e B sono, rispettivamente, quelli anteriore e posteriore dell'asta (si veda la Fig. 21).

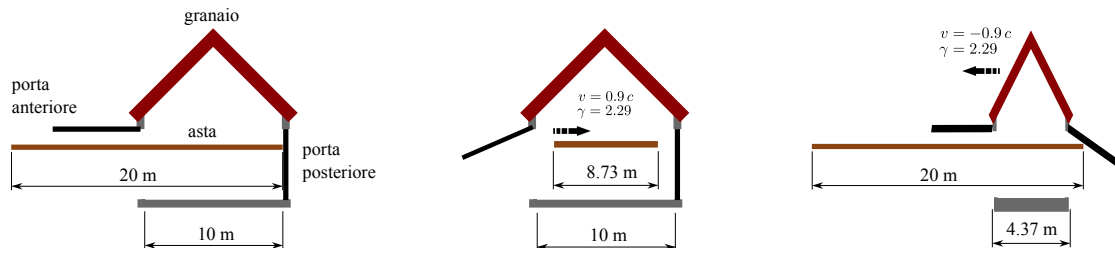


Fig. 21: Paradosso asta-granaio.

Di seguito illustriamo la linea di ragionamento da applicare se si vuole evitare di incorrere in errori.

### 1. Riferimento del granaio

- L'estremo A della sbarra entra nel granaio a  $t = 0$ ;
- L'estremo B entra a  $t = 8.73/0.9c = 32.33$  ns;
- L'estremo A esce a  $t = 10/0.9c = 37.04$  ns;
- L'estremo B esce a  $t = 32.35 + 37.04 = 69.37$  ns.

L'estremo inferiore dell'asta entra nel granaio prima che la parte anteriore esca. Pertanto l'asta sarà confinata, per un certo tempo, all'interno delle due porte.

### 2. Riferimento dell'asta

- L'estremo A della sbarra entra a  $t' = 0$ ;
- L'estremo A esce  $t' = 4.37/0.9c = 16.14$  ns;
- L'estremo B entra a  $t' = 20/0.9c = 74.07$  ns;
- L'estremo B esce  $t' = 16.14 + 74.07 = 90.21$  ns;
- La porta anteriore viene chiusa a  $t = 32.35$  ns, ma  $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 2.29 \times 32.33 = 74.07$  ns;
- La porta posteriore viene chiusa a  $t = 32.35$  ns, ma a  $x = 10$  m. Il tempo di chiusura della porta posteriore nel sistema di riferimento dell'asta è  $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 5.38$  ns.

Le chiusure dei cancelli non sono simultanee nel sistema di riferimento dell'asta e pertanto il passaggio dell'asta è possibile, senza che l'asta tocchi entrambe le porte. Si noti che le considerazioni precedenti portano a concludere che, dal punto di vista dell'asta, il cancello posteriore viene visto chiudersi prima di quello anteriore: perché?

Invitiamo il lettore a riconsiderare il problema utilizzando le considerazioni sulla simultaneità discusse nel paragrafo introduttivo, che hanno portato all'eq. (9).

Un secondo esempio, più sottile di quello precedente, è noto come paradosso della pulce e del chiodo, che illustriamo, con l'ausilio della Fig. 22, come segue. Una pulce si trova nell'interca-

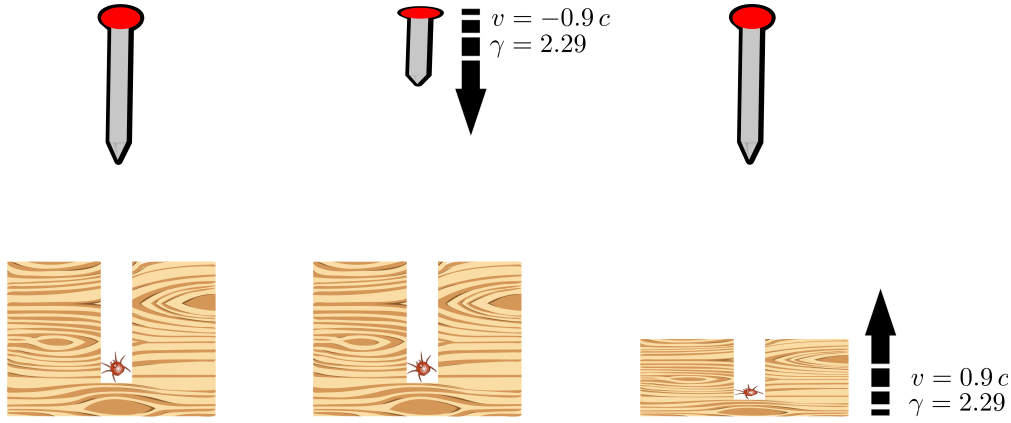


Fig. 22: Paradosso pulce-chiodo.

pedine di un foro profondo 1 cm, si vuole utilizzare un chiodo per schiacciarla, il chiodo è lungo solo 0.8 cm, e, pertanto, non dovrebbe essere in grado di raggiungere la pulce. Se il chiodo si muove a una velocità di  $0.9c$ , nel sistema di riferimento della pulce risulterà contratto e vieppiù inadeguato ai fini della soppressione dell'afanittero; viceversa il chiodo vede la profondità del buco contratta e pertanto si considera adeguato alla funzione. In termini più quantitativi:

### 1. Riferimento del chiodo

- La punta del chiodo raggiunge la pulce a  $t' = 0$ ;
- La punta del chiodo colpisce la parete a  $t' = 0.8 \text{ cm} / (0.9c) = 29.63 \text{ ps}$ ;
- La testa del chiodo raggiunge la parete esterna del buco (contratta nel suo sistema di riferimento) a  $t' = 1 \text{ cm} / 0.9c = 16.14 \text{ ps}$ .

La punta del chiodo raggiunge la pulce prima che la testa colpisca la parete esterna, la pulce sembra essere schiacciata.

### 2. Trasformazione dei tempi nel Riferimento della pulce

- La punta del chiodo raggiunge il buco a  $t = 0$ ;
- La testa del chiodo raggiunge la parete esterna a  $t = \gamma (t' - v x' / c^2) = 2.29 \times [29.63 - (0.9c \times 0.8) / c^2] = 12.9 \text{ ps}$ ;
- La punta del chiodo raggiunge la parete a  $t = 2.29 \times 16.14 = 37.04 \text{ ps}$ .

La pulce fa una esperienza strana sembra essere raggiunta dalla punta del chiodo, prima che la testa abbia colpito la parete esterna. Il paradosso è ancora in piedi.

### 3. Riferimento della pulce

- La punta del chiodo entra nel foro a  $t = 0$ ;
- La testa del chiodo urta la parete esterna a  $t = 0.8 / (0.9c\gamma) = 12.94 \text{ ps}$ .



Dal punto di vista della pulce il chiodo è lungo solo 0.35 cm per cui non subisce alcun danno.

#### 4. Trasformazione dei tempi nel Riferimento della chiodo

- La testa del chiodo raggiunge la parete esterna a  $t' = \gamma \times 12.9 = 29.63$  ps;
- La punta del chiodo si trova a  $x = -0.35$  cm in entrambi i sistemi di riferimento, ma a tempi diversi; infatti  $t' = \gamma [12.9 - (0.9c \times 0.0035)/c^2] = 5.63$  ps;
- $x = -1$  cm,  $t' = \gamma [37.04 - (0.9c \times 0.01)/c^2] = 16.14$  ps.

Le trasformazioni dei tempi dal riferimento della pulce a quello del chiodo forniscono un tempo necessario affinché la punta raggiunga -0.35 cm inferiore a quello necessario affinché la testa raggiunga la parete esterna. Il paradosso è ancora in piedi.

Considereremo il sistema di riferimento del chiodo come fermo e le relative posizioni e tempi saranno accentati. È evidente che il paradosso non è semplicemente associato a problemi di simultaneità. La risoluzione del paradosso non è affrontabile in un ambito puramente cinematico. Infatti bisogna tener conto che quando il chiodo impatta, nel sistema di riferimento della pulce, sulla parete del buco si ferma e ritorna alla lunghezza originale. La cosa non può avvenire istantaneamente e il fusto del chiodo comincerà a dilatarsi nel momento in cui il segnale dell'avvenuto impatto raggiungerà la punta del chiodo. Il calcolo dei tempi richiede considerazioni di Relatività Generale, ma questa osservazione risolve l'aspetto paradossale dell'esempio (apparentemente per la pulce non c'è scampo!).

L'ultimo esempio che illustreremo in questo paragrafo è noto come paradosso di Andromeda. Supponiamo che una persona in un'automobile in moto a velocità  $v$  incroci al tempo  $t = 0$  una persona ferma. Consideriamo ora una galassia lontana. L'osservatore fermo sarà sincrono con gli eventi sulla galassia mentre l'osservatore in moto vedrà, grazie a quanto sappiamo sulle trasformazioni di Lorentz, eventi spostati nel futuro. Se su quella galassia si sta tenendo un consiglio di guerra per decidere di invadere la Terra, l'osservatore in moto potrebbe addirittura "vedere" la decisione già presa e le astronavi spostarsi verso la Terra. La deduzione è perfettamente legittima, in base al concetto di simultaneità. Il paradosso si risolve notando che i segnali hanno però una velocità finita (quella della luce) pertanto entrambi gli osservatori riceveranno le informazioni relative agli stessi eventi. La contrazione delle lunghezze, dovuta alla velocità, compenserà infatti l'effetto della trasformazione di Lorentz, cosicché entrambi gli osservatori (fisso e in moto) riceveranno le informazioni relative alla decisione e all'inizio della missione nello stesso tempo. Descriveremo ulteriori esempi di paradossi nell'ultima parte degli esercizi e complementi.

## 1.7 Cinematica relativistica: primi rudimenti

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di sistemi di riferimento inerziali, ma non abbiamo introdotto alcuna quantità di natura cinematica, quali impulso e energia di una particella in moto con una data velocità.

Una particella che si propaga a una certa velocità costituisce un sistema di riferimento inerziale (se non soggetta a forze) e pertanto il moto di altre particelle può essere descritto relativamente a essa. Nel seguito, parleremo di sistema di riferimento del laboratorio, ovvero quello dell'osservatore considerato fisso, e di vari altri sistemi che introdurremo volta per volta.

Abbiamo visto che esiste una sorta di paradigma formale nella Relatività Ristretta costituito dalle trasformazioni di Lorentz e dall'invariante ad esse associato. Data una particella di energia

$E$  e momento  $\vec{p}$ , con massa a riposo  $m_0$ , definiamo il seguente quadrivettore nello spazio di Minkowski  $p_\mu \equiv (E, c\vec{p})$ , il quale prende il nome di **4-impulso** della particella. Per esso, risulta

$$p_\mu p^\mu = E^2 - c^2 \vec{p}^2 \quad (63)$$

È evidente che una particella ferma sarà caratterizzata dal quadrivettore  $p_\mu \equiv (m_0 c^2, \vec{0})$ , per cui, come conseguenza dell'invarianza della norma del quadrivettore, si ottiene la fondamentale relazione<sup>15</sup>:

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = (m_0 c^2)^2 \quad (64)$$

I 4-impulsi relativi a due particelle diverse possono essere sommati secondo la relazione

$$P_\mu = p_{1,\mu} + p_{2,\mu} = (E_1, c\vec{p}_1) + (E_2, c\vec{p}_2) \equiv (E_1 + E_2, c(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)) \quad (65)$$

e la norma del 4-vettore risultante sarà

$$P_\mu P^\mu = (m_1^2 + m_2^2) c^4 + 2(E_1 E_2 - c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2). \quad (66)$$

Supponiamo ora di essere autorizzati ad eseguire la sostituzione ( $x \rightarrow cp, \tau \rightarrow E$ ) nella trasformazione di Lorentz (26). Per l'energia totale otterremo:

$$E' = m_0 \gamma c^2 \quad (67)$$

da cui l'energia cinetica risulterà essere

$$T' = E' - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2. \quad (68)$$

Inoltre, inserendo la (64) nella (67), per l'impulso si avrà:

$$|\vec{p}'| = m_0 \gamma u \quad (69)$$

Queste relazioni, sebbene ricavate in modo un po' "creativo", sono le corrette espressioni relativistiche per le variabili energia totale, energia cinetica e impulso. Nel seguito, quindi, ci dimenticheremo di averle ricavate a partire da una trasformazione di Lorentz tra riferimenti, eliminando l'accento sulle variabili che compaiono nel membro di sinistra delle eq. (67), (68) e (69). Notiamo, infine, che dalla (67) risulta il seguente legame tra energia totale e fattore relativistico

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}. \quad (70)$$

Di seguito considereremo alcuni esempi utili per chiarire i concetti precedenti. Dato un protone con un momento di 10 GeV/c, nel laboratorio, si determini la sua energia totale e la sua velocità. Dalla eq. (64) scritta nella forma

$$E = \sqrt{(c\vec{p})^2 + (m_0 c^2)^2}, \quad (71)$$

poiché la massa del protone è 0.938 GeV, otteniamo  $E \simeq 10.04$  GeV, da cui segue  $\gamma \simeq 10.71$ , e, quindi, dalla (69) una velocità  $\beta = 0.99563$ . Infine, l'energia cinetica risulta essere  $T \simeq 9.1$  GeV.

<sup>15</sup> Nel seguito, utilizzando l'equivalenza tra massa ed energia, esprimeremo le masse delle particelle direttamente in multipli di *electron Volt*. Ricordiamo che  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  e che la massa dell'elettrone corrisponde, in questo sistema di unità di misura, a 0.511 MeV. È evidente che  $1 \text{ eV}$  corrisponde a una massa di  $1 \text{ eV}/c^2 \simeq 1.77 \times 10^{-36} \text{ kg}$  e, dunque, la massa di un elettrone è  $\simeq 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

Cerchiamo ora una conferma sperimentale di quanto affermato sulla dilatazione dei tempi. Un muone è una particella instabile che decade secondo la reazione<sup>16</sup>

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (72)$$

e ha una vita media (nel proprio sistema di riferimento) di circa  $2 \mu s$ . Nel sistema di riferimento del laboratorio il tempo di vita media di muoni con energia di 1 GeV è circa  $20 \mu s$ . La spiegazione dell'apparente paradosso è una conseguenza diretta dei ragionamenti sviluppati nei paragrafi introduttivi. Poiché la massa del muone è  $m_\mu = 0.106$  GeV, il tempo del laboratorio risulta dilatato del corrispondente fattore relativistico  $\gamma \simeq 10$ .

Consideriamo ora la seguente reazione (si veda la Fig. 23)

$$p + p \rightarrow p + \bar{p} + p + p, \quad (73)$$

ovvero la produzione di un antiprotone in un urto protone-protone<sup>17</sup>. Ci chiediamo: se uno dei



Fig. 23: Rappresentazione pittorica della reazione  $p + p \rightarrow p + \bar{p} + p + p$ .

due protoni è fermo quale deve essere la minima energia del protone incidente affinché la reazione abbia luogo? Tenuto conto che da un punto di vista cinematico avremo

$$p_1^\mu \equiv (E_1, \vec{p}_1), \quad p_2^\mu \equiv (m_p c^2, \vec{0}), \quad (74)$$

per cui il 4-impulso totale dello stato iniziale è:  $P^\mu \equiv (E_1 + m_p c^2, \vec{p}_1)$ , e, quindi

$$P_\mu P^\mu = 2m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 E_1. \quad (75)$$

Poiché nel sistema di riferimento in cui i tre protoni e l'antiprotone finale sono fermi risulta<sup>18</sup>

$$P_\mu P^\mu = (4m_p c^2)^2 \quad (76)$$

segue che

$$E_1 = 7m_p c^2 \quad (77)$$

Per ulteriori esempi si rimanda alla sezione 2.

<sup>16</sup> Abbiamo indicato con  $\bar{\nu}_e$  l'antineutrino elettronico e con  $\nu_\mu$  il neutrino muonico, particelle con massa molto inferiore a quella dell'elettrone (qualche decennio fa si riteneva che fossero particelle a massa nulla).

<sup>17</sup> Come è noto l'antiprotone fu scoperto a Berkeley in un processo di urto su *targhetta fissa* da parte di un fascio di protoni prodotti da una macchina acceleratrice nota come bevatrone. Targhetta fissa significa che il fascio di protoni urta su un bersaglio (ad esempio una targhetta di idrogeno) fermo.

<sup>18</sup> Il prodotto della reazione va considerato come un'unica particella con massa pari a quattro volte quella del protone. Si noti inoltre che una reazione può essere permessa dalle regole cinematiche (ovvero conservazione dell'energia e dei momenti) ma non da quelle imposte da altre condizioni fisiche: ad esempio,  $p + p \rightarrow p + \bar{p}$  sarebbe cinematicamente permesso ma violerebbe quella che in fisica delle particelle va sotto il nome di legge di conservazione del *numero barionico*.

## 1.8 Cinematica relativistica: leggi di conservazione e decadimenti di particelle

Nel paragrafo precedente abbiamo fatto l'esempio della diffusione protone-protone, di fondamentale importanza per la scoperta dell'antiprotone. Proviamo a rovesciare il problema considerando il caso di una particella ferma di massa  $M$  che decade in due particelle figlie: cosa dovremmo aspettarci (dal punto di vista cinematico) per i prodotti di decadimento? Imponendo la conservazione dell'energia e del vettore impulso, si ha:

$$\begin{aligned}\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 & \quad \rightarrow \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p \\ M c^2 = E_1 + E_2 = \sqrt{(c p)^2 + (m_1 c^2)^2} + \sqrt{(c p)^2 + (m_2 c^2)^2}\end{aligned}\quad (78)$$

da cui risolvendo per  $p$  si ottiene

$$p = \frac{c}{2M} \sqrt{[M^2 - (m_1 - m_2)^2][M^2 - (m_1 + m_2)^2]}.\quad (79)$$

La considerazione più importante da fare in merito alla precedente equazione è che il decadimento avviene solo se  $M \geq m_1 + m_2$ . È inoltre facile mostrare che le energie delle singole particelle sono date da:

$$E_{1,2} = \frac{M^2 + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2}{2M} c^2.\quad (80)$$

Si noti che nel caso  $m_1 = m_2 = m$ , si ha

$$E_1 = E_2 = \frac{M c^2}{2},\quad (81)$$

e, quindi:

$$\gamma = \frac{M}{2m}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}.\quad (82)$$

Le attuali condizioni cinematiche sono pertanto diverse da quelle discusse precedentemente nell'esempio sulla diffusione dei protoni; cercheremo di chiarire la differenza nel seguito. Tali condizioni non fissano inoltre alcuna direzione privilegiata: il decadimento è isotropo. L'unica condizione imposta dalla conservazione del momento è che le particelle figlie si muovano con impulsi opposti nel centro di massa della particella madre.

Che cosa è il centro di massa? Prima di rispondere a questa domanda, chiariamo che, sebbene non affermato esplicitamente, abbiamo assunto che nei cambiamenti di riferimento il 4-vettore energia-impulso si trasformi come quello posizione, ovvero

$$\begin{pmatrix} E' \\ c \vec{p}'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ c \vec{p}_{\parallel} \end{pmatrix},\quad (83)$$

dove  $\vec{p} = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp}$  con i simboli  $\parallel, \perp$  a indicare, rispettivamente, la componente parallela e trasversa alla direzione di moto.

Il centro di massa di un insieme di particelle è il sistema di riferimento in cui tale insieme appare come un'unica particella con massa pari alla somma delle masse delle singole particelle e con impulso totale nullo. Pertanto, considerando un sistema composto da due particelle soltanto

$$p_{1,2}^{\mu} \equiv (E_{1,2}, c \vec{p}_{1,2}),\quad (84)$$

indicando con  $P^{\mu} = p_1^{\mu} + p_2^{\mu}$  il 4-impulso totale del sistema, esso nel centro di massa è

$$P^{*\mu} \equiv (E_1^* + E_2^*, \vec{0}),\quad (85)$$

di modo che

$$P^{*\mu} P_\mu^* = P^\mu P_\mu = M^2 c^4 \quad (86)$$

Il fattore relativistico del centro di massa di due particelle è definibile come

$$\gamma_* = \frac{E}{M c^2} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{(E_1 + E_2)^2 - c^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}}. \quad (87)$$

Ad esempio, nel caso dell'urto tra protoni trattato in sezione (1.7), in cui uno è fermo, avremo

$$\gamma_* = \sqrt{\frac{\gamma_p + 1}{2}}. \quad (88)$$

dove  $\gamma_p$  è il fattore relativistico del protone in moto. Per questa reazione la condizione di soglia di produzione dello stato finale risulta essere

$$2 m_p \gamma_* = 4 m_p \quad (89)$$

da cui, utilizzando la (88), si ricava:  $\gamma_p = 7$ .

Come ulteriore esempio, ci proponiamo di determinare l'energia minima di un fascio di protoni necessaria per la produzione di pioni neutri secondo la reazione

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0. \quad (90)$$

Nel caso in cui uno dei protoni iniziali sia fermo, l'applicazione della condizione

$$2 m_p \gamma_* = 2 m_p + m_{\pi^0} \quad (91)$$

fornisce per il fattore relativistico del fascio di protoni iniziale la seguente espressione

$$\gamma_p = 1 + 2 \left( 1 + \frac{1}{4} r \right) r, \quad \left( r = \frac{m_{\pi^0}}{m_p} \right). \quad (92)$$

Gli esempi precedenti riguardano il caso in cui una delle particelle iniziali è in quiete nel sistema del laboratorio. In tale circostanza, tramite una trasformazione di Lorentz, si può studiare il processo in un nuovo sistema di riferimento in cui una delle particelle risulti ferma, oppure procedere direttamente, utilizzando l'eq. (87).

## 1.9 Nozioni di dinamica relativistica

Nei paragrafi precedenti abbiamo discusso nozioni di cinematica relativistica associate a problemi di urto e decadimenti e non abbiamo fatto cenno a problemi di natura dinamica, che richiedano l'introduzione del concetto di forza. Sebbene la trattazione rigorosa delle forze andrebbe fatta nell'ambito del formalismo della relatività generale, qui ci limiteremo a studiare il caso in cui i problemi possano essere trattati generalizzando relativisticamente la seconda legge di Newton<sup>19</sup>

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}. \quad (93)$$

<sup>19</sup> In base alle definizioni di accelerazione ( $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ ) e impulso ( $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ ), la seconda legge di Newton può essere riscritta come  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$

dove la variabile temporale  $t$  rispetto a cui viene calcolata la derivata è quello dell'osservatore fisso, ovvero quello del laboratorio.

Consideriamo ora un problema estremamente semplice, ovvero quello di una particella soggetta ad una forza unidimensionale costante. Assumendo che la particella sia inizialmente ferma, dall'integrazione della (93) si ottiene

$$\gamma v(t) = \alpha t, \quad \alpha = \frac{F}{m_0}, \quad (94)$$

da cui, ricordando l'espressione per il fattore relativistico  $\gamma$ , si ha

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}} \quad (95)$$

la quale, integrata sotto la condizione  $s(0) = 0$ , conduce alla legge oraria

$$s(t) = \frac{c^2}{\alpha} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2} - 1 \right]. \quad (96)$$

Le equazioni orarie classiche del moto uniformemente accelerato si ottengono da queste equazioni espandendo le radici all'ordine  $O(\alpha^2 t^2/c^2)$ . Proponiamo come utile esercizio la derivazione delle leggi di moto con  $v(0) \neq 0$  e  $s(0) \neq 0$ .

Un esempio specifico in questo senso è offerto dall'accelerazione indotta su un elettrone da un campo elettrico costante ( $\alpha = e E/m$ ). Eseguendo la derivata rispetto al tempo di ambo i membri della (93) si ha

$$c \gamma \left( 1 + \gamma^2 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) = \vec{\alpha}. \quad (97)$$

Se  $\vec{\beta}^2$  è costante, allora

$$\frac{d\vec{\beta}^2}{dt} = 2 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} = 0, \quad (98)$$

ovvero l'accelerazione è ortogonale alla velocità e risulta

$$c \gamma \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \vec{\alpha}. \quad (99)$$

Uno specifico esempio è quello di un elettrone relativistico soggetto alla forza di Lorentz, per il quale, in base alla equazione precedente, si ricava

$$\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (100)$$

Torneremo su esempi di applicazione in sezione 2.

È ora il caso di approfondire alcuni aspetti della dinamica relativistica che riguardano la relazione tra la direzione della forza agente su una particella e velocità della stessa. Consideriamo le relazioni che definiscono velocità ed energia di una particella

$$\vec{\beta} = \frac{c \vec{p}}{E}, \quad E^2 - (c \vec{p})^2 = (m c^2)^2, \quad (101)$$

Derivando rispetto alla variabile temporale ambo i membri di queste due equazioni, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{dt} &= \frac{c}{E} \vec{F} - \frac{c\vec{p}}{E^2} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{c^2}{E} \vec{p} \cdot \vec{F} = c \vec{\beta} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \vec{F},\end{aligned}\quad (102)$$

che, combinate tra loro, consentono di scrivere

$$E \frac{d\vec{\beta}}{dt} = c \vec{F} - \frac{c^3}{E^2} (\vec{p} \cdot \vec{F}) \vec{p} \quad (103)$$

ovvero

$$\frac{E}{c} \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \vec{F} - (\vec{\beta} \cdot \vec{F}) \vec{\beta}. \quad (104)$$

da cui, esprimendo la forza come somma delle sue componenti parallela e trasversa alla velocità, otteniamo

$$\frac{E}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = (1 - \beta^2) \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}. \quad (105)$$

Il risultato precedente, interpretato correttamente in termini di legge di inerzia, ci dice che se la forza applicata è parallela alla velocità, l'*inerzia* non è semplicemente la massa, ma:

$$\frac{E}{c^2} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (106)$$

mentre, se la forza è perpendicolare alla velocità, l'*inerzia* è semplicemente  $E/c^2$ . È opportuno aggiungere la considerazione che il concetto di forza in relatività ristretta non è ben definito. Una trattazione corretta richiede l'utilizzo del contesto più ampio della Relatività Generale dove i concetti di massa forza e inerzia assumono una prospettiva diversa. Le considerazioni precedenti sono da ritenere come puramente indicative.

Concludiamo questa sezione determinando come il vettore forza si trasforma a seguito di un cambiamento di riferimento. Nel caso della trasformazione di Lorentz tra le terne  $S$  e  $S'$  definite nella sezione 1.1, possiamo scrivere

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \equiv \frac{d}{dt'} \left[ \gamma_R \left( p_x - \frac{\beta_R}{c} E \right), p_y, p_z \right] \quad (107)$$

ovvero

$$\vec{F}' \equiv \frac{\frac{d}{dt} \left[ \gamma_R \left( p_x - \frac{\beta_R}{c} E \right), p_y, p_z \right]}{\frac{dt'}{dt}}, \quad (108)$$

dove

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma_R \left( 1 - \frac{\beta_R}{c} v_x \right). \quad (109)$$

L'indice  $R$  è un esplicito riferimento alla velocità relativa (costante) tra le terne inerziali  $S$  e  $S'$ , per cui le quantità  $\beta_R$ ,  $\gamma_R$  hanno derivata temporale nulla. A questo punto non è difficile concludere che

$$\vec{F}' \equiv \frac{1}{\gamma_R (1 - \beta_R \beta_x)} \left( \gamma_R (F_x - \beta_R \vec{\beta} \cdot \vec{F}), F_y, F_z \right). \quad (110)$$

### 1.10 Dinamica relativistica e quadrivettori

L'analisi sviluppata nel paragrafo precedente ha messo in luce come il concetto di forza in relatività ristretta presenti degli elementi di ambiguità. In questo paragrafo cercheremo di affrontare il problema in una maniera più idonea dal punto di vista matematico, ma che non risolverà il problema di fondo: la forza è una sorta di “straniero” nella relatività ristretta.

Abbiamo già avuto modo di sottolineare come la seconda legge della dinamica, scritta in forma relativistica, preveda nella derivata temporale il tempo dell'osservatore. In termini del **tempo proprio**  $\tau = t/\gamma$  della particella in moto, in base alla prima delle equazioni (93), si ha:

$$\gamma \vec{F} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}, \quad (111)$$

che suggerisce di definire un *quadrivettore forza* (quadriforza) come

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (112)$$

Da tale definizione, tenendo conto della seconda delle equazioni (102), risulta

$$F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = \gamma \vec{v} \cdot \vec{F}, \quad (113)$$

e, quindi

$$F^\mu \equiv (\gamma \vec{v} \cdot \vec{F}, \gamma c \vec{F}) = c \gamma (\vec{\beta} \cdot \vec{F}, \vec{F}). \quad (114)$$

È interessante notare che la componente temporale della quadriforza è legata alla potenza dissipata dalla forza sulla particella stessa. Inoltre, è facile vedere che risulta

$$F^\mu F_\mu = -c^2 (\vec{F}_\parallel^2 + \gamma^2 \vec{F}_\perp^2). \quad (115)$$

Nello studio del decadimento delle particelle abbiamo assunto che l'impulso si conserva; quindi, abbiamo tacitamente assunto che vale la terza legge della dinamica. La cosa è sicuramente vera se ci limitiamo al caso della generalizzazione relativistica della seconda legge di Newton, ovvero se facciamo riferimento al tempo dell'osservatore. Se, invece, ragioniamo in termini quadriforza, ad esempio, nel caso di due particelle che decadono avremo due tempi propri differenti. Inoltre dovremmo considerare anche il tempo proprio del centro di massa. Non è difficile convincersi che le quadriforze in gioco sono le seguenti:

$$F_{CM}^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau_{CM}}, \quad F_k^\mu = \frac{dp_k^\mu}{d\tau_k} \quad (k = 1, 2) \quad (116)$$

Poiché  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ , e  $\tau_1 \neq \tau_2$ , segue che la quadriforza non risulta essere conservata, ovvero:

$$\frac{dp_1^\mu}{d\tau_1} + \frac{dp_2^\mu}{d\tau_2} \neq 0.$$



## 2 ESERCIZI E COMPLEMENTI

## 2.1 Addizione delle velocità e trasformazioni di Lorentz

**Algebra relativistica** Nei paragrafi introduttivi abbiamo visto come, in ambito relativistico, l'addizione della velocità non sia una addizione nel senso corrente della somma algebrica o vettoriale. Abbiamo infatti evitato di indicare l'operazione di somma tramite il normale simbolo di addizione, adottando la notazione  $\&$  definita come

$$v' \& v_R = \frac{v' + v_R}{1 + \frac{v_R v'}{c^2}}. \quad (117)$$

È da notare che nella composizione, le due velocità sono parallele, e va tenuto conto del loro verso relativo. Da un punto di vista puramente astratto potremmo introdurre la seguente regola algebrica: dato un insieme  $M$ , caratterizzato da infiniti elementi, indicati con  $\alpha$  e  $\beta$  due di essi, introduciamo l'operazione di addizione

$$[\alpha \& \beta] = \frac{\alpha + \beta}{1 + \frac{\alpha \beta}{\lambda^2}} \in M \quad (118)$$

dove  $\lambda$  è anch'esso un elemento di  $M$ . Tale operazione è evidentemente simmetrica rispetto allo scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$  e gode della proprietà:

$$[\lambda \& \alpha] = \lambda \quad \forall \alpha \in M. \quad (119)$$

Inoltre, risulta

$$[\alpha \& [\beta \& \gamma]] = [[\alpha \& \beta] \& \gamma] = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \frac{\alpha \beta \gamma}{\lambda^2}}{1 + \frac{\alpha \beta + \alpha \gamma + \beta \gamma}{\lambda^2}} \in M \quad (120)$$

Nel seguito, quando necessario per la chiarezza del discorso, renderemo esplicito il segno di  $\beta$  rispetto ad  $\alpha$ , apponendolo come pedice alla parentesi quadra di destra, ovvero

$$[\alpha \& \beta]_{\pm} = [\alpha \& (\pm\beta)] = \frac{\alpha \pm \beta}{1 \pm \frac{\alpha \beta}{\lambda^2}}.$$

Il prodotto - che verrà indicato con il simbolo  $*$  - tra un numero intero  $m$  e un elemento dell'algebra dovrà intendersi come l'operazione di composizione ripetuta  $m$ -volte, ovvero

$$m * \alpha = \alpha \& \alpha \& \cdots \& \alpha, \quad (121)$$

per cui avremo, ad esempio,

$$2 * \alpha = \frac{2\alpha}{1 + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2}.$$

Le regole algebriche che abbiamo appena descritto hanno una funzione meramente mnemonica. Facciamo comunque notare che da esse risulta che:

1. esiste una velocità limite dell'eq. (119), che assumeremo essere la velocità della luce;
2. nell'ipotesi  $|\alpha|, |\beta| \leq |\lambda|$ , il massimo e il minimo della relazione di composizione sono, rispettivamente,  $\lambda$  e  $-\lambda$  come si può vedere notando che

$$\partial_{\alpha}[\alpha \& \beta] = \partial_{\beta}[\alpha \& \beta]$$

sono sempre diverse da zero in  $[-\lambda, \lambda]$ .

### 2.1.1 Esercizio

Si consideri quanto illustrato in Fig. 24, in cui si mostrano due carrelli che si muovono nello stesso verso con velocità  $v_A = \frac{4}{5}c$  e  $v_B = \frac{3}{5}c$ , e si risponda alle seguenti domande:

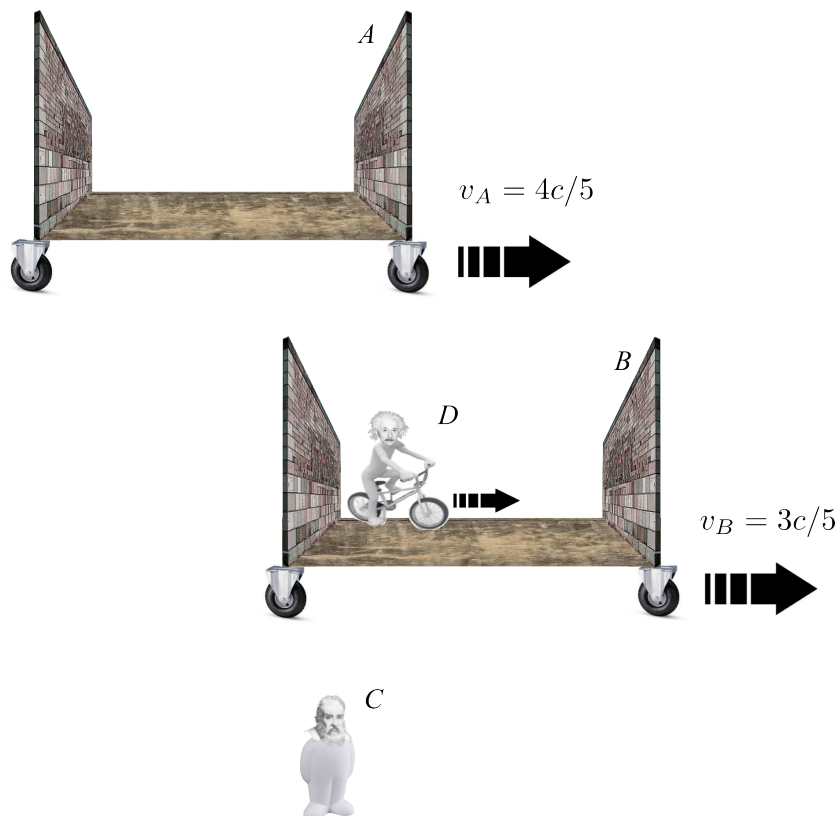


Fig. 24: Carrelli in moto nello stesso verso.

1. quanto tempo trascorrerà nel sistema di riferimento A perché il carrello superi B;
2. una persona si muove lungo B con velocità costante, si dica in quanto tempo avviene il sorpasso per la persona in moto.

#### Primo quesito

Si tenga conto che dal punto di vista di A la velocità rispetto a B risulta essere (si noti che A vede B muoversi nel verso opposto)

$$[v_A \& v_B]_- = \frac{v_A - v_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} = \frac{5}{13} c.$$

Il fattore relativistico associato è  $\gamma = 13/12$ , per cui, vista da A, la lunghezza del carrello B risulta essere  $(12/13)L$ , e un osservatore posto sulla testa di A vedrà tutto il carrello scorrere sotto di sé in un tempo pari a  $T = (12/5)(L/c)$ .

Secondo quesito

Si tenga conto che l'osservatore D vede il carrello A muoversi con velocità

$$[v_D \& [v_A \& v_B]_-]_- = [[v_D \& v_B]_+ \& v_A]_- \dots$$

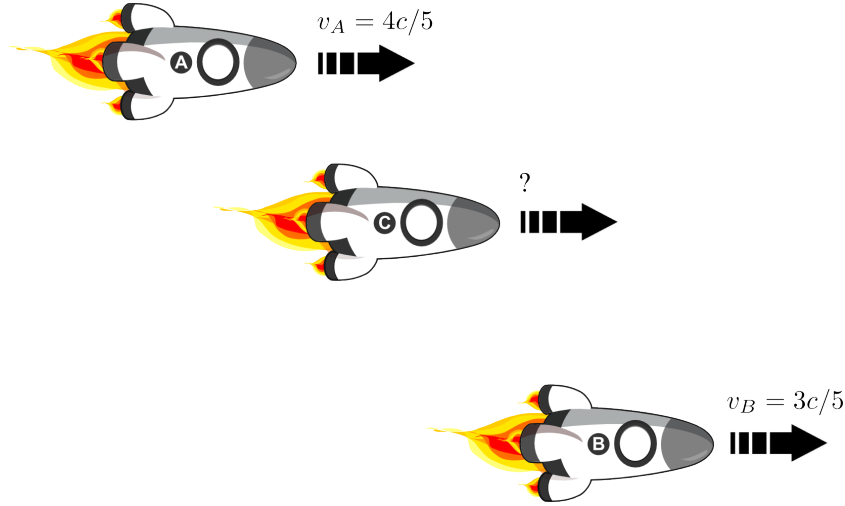


Fig. 25: Tre razzi in movimento.

### 2.1.2 Esercizio

Con riferimento alla Fig. 25 si dica a che velocità viaggia il razzo C se un osservatore solidale con esso vede sia A che B muoversi verso di lui con velocità uguali.

Si noti che  $[v_A \& v_C]_- = [v_C \& v_B]_-$  e pertanto avremo:  $35(v_A/c)^2 - 74(v_A/c) + 35 = 0$ , da cui si ricava  $v_C = (5/7)c$ .

### 2.1.3 Esercizio

Nella Fig. 26 si riporta il razzo B fermo, e il razzo A in moto con velocità  $v$ . A che velocità dovrebbe muoversi C perché veda A e B muoversi verso di esso con la stessa velocità? Qual è, nel sistema di riferimento di B il rapporto tra le distanze CB e AC?

Utilizzando la stessa procedura dell'esercizio precedente si ottiene la seguente condizione ( $\beta = v/c$ )

$$\beta_A \beta_C^2 - 2\beta_C + \beta_A = 0,$$

da cui segue<sup>20</sup>

$$\beta_C = \frac{\gamma_A - 1}{\beta_A \gamma_A},$$

e, inoltre

$$\frac{CB}{AC} = \frac{v_C}{v_A - v_C} = \gamma_A.$$

<sup>20</sup> Si spieghi perché abbiamo scartato la soluzione  $\beta_C = \frac{\gamma_A + 1}{\beta_A \gamma_A}$ .

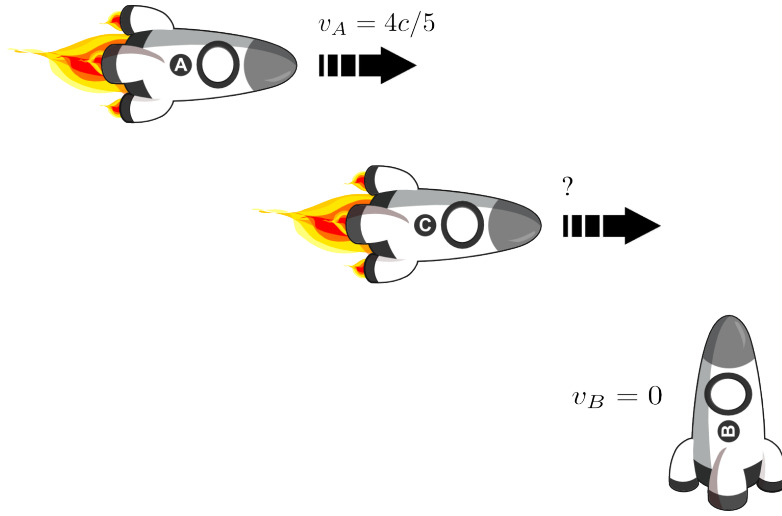


Fig. 26: Due razzi in movimento e uno fermo.

Abbiamo visto che la composizione relativistica delle velocità nel caso di componenti ortogonali fornisce quanto mostrato nell'eq. (29), che riscriveremo come segue

$$[v \& u]_{\perp, \pm} = \frac{u}{\gamma_v \left(1 \pm \frac{v u}{c^2}\right)}, \quad [u \& v]_{\perp, \pm} = \frac{v}{\gamma_u \left(1 \pm \frac{v u}{c^2}\right)}. \quad (122)$$

#### 2.1.4 Esercizio

Una particella si muove con velocità  $(u_x, u_y)$  ed una seconda si muove con velocità  $v$  lungo la direzione di  $x$  della prima. Si determini  $v$  in modo tale che un osservatore solidale con essa veda la componente  $y$  inalterata.

Dalla composizione delle velocità si ha

$$u'_x = [u_x \& v]_{\pm} = \frac{u_x \pm v}{1 \pm \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = [v \& u_y]_{\pm} = \frac{u_y}{\gamma} \frac{1}{1 \pm \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Per avere  $u_y = u'_y$  dobbiamo imporre la condizione

$$\gamma \left(1 \pm \frac{u_x v}{c^2}\right) = 1$$

da cui si ricava

$$1 - \beta^2 = \left(1 \pm \beta \frac{u_x}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, \pm 2 \frac{u_x}{c} \frac{1}{1 + \frac{u_x^2}{c^2}}. \quad (123)$$

### 2.1.5 Esercizio

Si consideri un fotone in moto con un angolo  $\vartheta$ , rispetto all'asse  $x'$  di un sistema di riferimento  $S'$ , che si muove con velocità  $v$  (lungo l'asse  $x'$ ) rispetto a un sistema  $S$ . Si calcolino le componenti della velocità del fotone in  $S$ , e si verifichi che la velocità è  $c$ .

Si proceda come segue:

$$C_x = [v \& c \cos \vartheta]_{\pm}, \quad C_y = [v \& c \sin \vartheta]_{\perp, \pm},$$

e si verifichi che  $c = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$ .

### 2.1.6 Esercizio

Si consideri il problema della composizione vettoriale di velocità dimostrando che

$$\vec{u}' = [\vec{u} \& \vec{v}] = \frac{\vec{u} + \gamma \vec{v} \left( \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} - 1 \right)}{\gamma \left( 1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2} \right)} \quad (124)$$

e si derivi da questa la seguente trasformazione degli angoli

$$\tan \vartheta' = \frac{|\vec{u}| \sin \vartheta}{\gamma (|\vec{u}| \cos \vartheta - v)} = \frac{u'_y}{u_x} \quad \tan \vartheta = \frac{u_y}{u_x}. \quad (125)$$

### 2.1.7 Esercizio

Due particelle  $A$  e  $B$ , inizialmente in contatto nell'origine, si allontanano da questa con velocità pari a  $(3/5)c$ , nel sistema di riferimento del laboratorio. Assumendo che  $A$  si muova verso destra e  $B$  verso sinistra, si consideri, nel sistema fisso, un punto di coordinata  $x = L$ . Quando  $A$  ha raggiunto tale punto, la sua distanza da  $B$ , nel sistema di riferimento del laboratorio, è pari a  $2L$ . Quale sarà tale distanza nel sistema di  $A$ ?

Si tenga conto che le coordinate spaziotemporali nel sistema del laboratorio sono

$$x_A^\mu \equiv \left( L, \frac{5}{3} \frac{L}{c} \right), \quad x_B^\mu \equiv \left( -L, \frac{5}{3} \frac{L}{c} \right),$$

mentre in quello solidale con la particella  $A$

$$x_A'^\mu \equiv (0, 0), \quad x_B'^\mu \equiv \gamma \left( -L - \frac{5}{3} \beta L, \frac{5}{3} \beta \frac{L}{c} + \frac{L}{c} \right),$$

$$\left( v = [v_A \& v_B] = \frac{15}{17} c, \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{17}{8} \dots \right).$$

### 2.1.8 Esercizio

Si dimostri che il fattore relativistico di  $[u \& v]_{\pm}$  è

$$\gamma_{\pm} = \gamma_u \gamma_v \left( 1 \pm \frac{uv}{c^2} \right). \quad (126)$$

### 2.1.9 Esercizio

Un orologio si muove verticalmente con velocità  $u$  rispetto ad un certo sistema di riferimento una persona si muove orizzontalmente con velocità  $v$  rispetto allo stesso sistema di riferimento. Si dimostri che l'orologio segna, rispetto all'osservatore, un tempo minore di un fattore  $\gamma_u \gamma_v$ .

### 2.1.10 Esercizio

Si consideri una terna pitagorica  $(m, n, p)$  e la composizione relativistica tra  $m/p$  e  $n/p$ . Si dimostri che numeratore e denominatore di tale composizione sono, rispettivamente, il cateto e l'ipotenusa di un'altra terna relativistica; si determini l'altro cateto e si derivi il fattore relativistico associato.

Poiché  $p^2 = m^2 + n^2$ , e

$$\left[ \left( \frac{m}{p} \right) \& \left( \frac{n}{p} \right) \right]_{\pm} = \frac{(m \pm n)p}{p^2 \pm mn},$$

si ha

$$(p^2 \pm mn)^2 - (m \pm n)^2 p^2 = (mn)^2.$$

Pertanto, la nuova terna è  $(mn, (m \pm n)p, p^2 \pm mn)$ , e il fattore relativistico associato è

$$\gamma = \frac{p^2 \pm mn}{mn}.$$

### 2.1.11 Esercizio

Un treno di lunghezza propria  $L$  si muove a velocità  $v_1$  rispetto al suolo. Un passeggero si muove dal retro del treno verso la parte anteriore ad una velocità  $v_2$  rispetto al treno. Quanto tempo impiegherà, nel sistema di riferimento del suolo, a percorrere tutto il treno?

Il tempo impiegato all'interno del treno è  $T_t = L/v_1$ ; dalla dilatazione dei tempi segue che  $T_s = \gamma_t T_t$ .

### 2.1.12 Esercizio

Un treno di lunghezza propria  $L$  si muove con una velocità  $c/2$  rispetto al suolo. Una palla viene lanciata, nella direzione di moto, con velocità  $c/3$ , relativamente al treno. Si dica in quanto tempo la palla percorre il treno:

1. nel sistema di riferimento del treno;
2. nel suo sistema di riferimento;
3. nel sistema di riferimento del suolo.

Infine, si verifichi che l'intervallo invariante è tale in tutti e tre i sistemi di riferimento.

1.  $T_t = 3L/c$ ;
2.  $T_p = 3L/c\gamma_p$ ;
3. La velocità della palla rispetto al suolo è

$$V_p = \frac{v_p + v_t}{1 + \frac{v_p v_t}{c^2}}$$

e il fattore relativistico associato è

$$\gamma_p \gamma_t \left( 1 + \frac{v_p v_t}{c^2} \right).$$

Pertanto,

$$T_S = \gamma_t \left( 1 + \frac{v_p v_t}{c^2} \right) \frac{3L}{c}.$$

### 2.1.13 Esercizio

Una particella entra, con velocità  $v$ , in un tubo, di lunghezza  $L$ , alla cui estremità opposta è collocata una sorgente di luce, che si attiva simultaneamente (nel sistema di riferimento del tubo) all'ingresso della particella, emettendo un fotone verso di essa. Si determini la posizione in cui fotone e particella si incontreranno all'interno del tubo. Si risolva il problema lavorando: (1) nel sistema di riferimento del tubo, e (2) nel sistema di riferimento della particella.

1. Assumendo come origine degli assi l'ingresso del tunnel, fotone e particella s'incontrano nel punto  $X = \beta L / (1 + \beta)$  al tempo  $T = X / \beta c$ .
2. Nel sistema di riferimento della particella bisogna tener conto delle trasformazioni di Lorentz ...

### 2.1.14 Esercizio

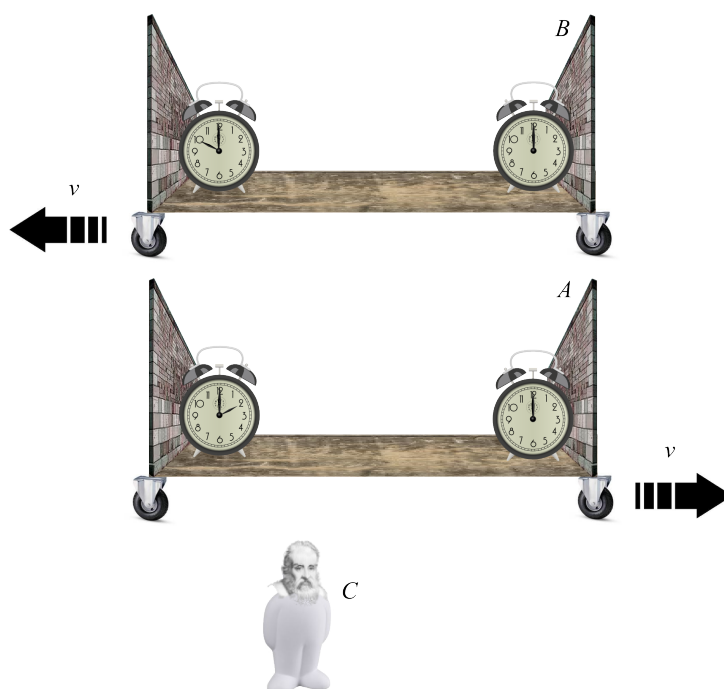


Fig. 27: Due carrelli in verso opposto.

Due carrelli, A e B, ciascuno di lunghezza  $L$ , si muovono con velocità uguali e opposte (si veda Fig. 27). Quando i carrelli si sovrappongono, un osservatore C, fermo rispetto ad essi, nota



che due orologi posti, rispettivamente, nella parte frontale del carrello A e nella parte di coda del carrello B segnano lo stesso tempo, diciamo  $t = 0$ . Gli orologi posti, invece, nelle pareti opposte segnano tempi diversi. Si determinino questi tempi e si spieghi perché sono diversi. Si studi il problema anche dal punto di vista di un osservatore solidale con A.

### 2.1.15 Esercizio

Abbiamo avuto modo di vedere che le trasformazioni di Lorentz non lasciano invariato la norma euclidea, ovvero le lunghezze geometriche, ma la norma non-Euclidea  $s^2 = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - |\vec{r}|^2$ . Abbiamo visto che tale invarianza è conseguenza dei principi della relatività e, da un punto di vista matematico, è legata alla natura delle trasformazioni di Lorentz. Queste trasformazioni possono essere considerate come una “rotazione” non euclidea - una sorta di rotazione iperbolica -, e che la matrice relativa a tale trasformazione può essere scritta in termini di funzioni iperboliche, che permettono una interpretazione geometrica dei vari fattori relativistici. *Un utile esercizio consiste nell'utilizzare le proprietà delle funzioni iperboliche per dedurre quanto discusso fino ad ora e in particolare per dimostrare che la legge di composizione delle velocità non è altro che la regola di addizione della tangente iperbolica.*

Si ricordi che  $\beta = \tanh \alpha$ , per cui  $[\beta_1 \& \beta_2]_{\pm} = \tanh(\alpha_1 \pm \alpha_2) \dots$

### 2.1.16 Esercizio

Si dimostri la precedente relazione di invarianza utilizzando esplicitamente le trasformazioni di Lorentz

Suggerimento:

$$(ct)^2 - x^2 = \gamma^2 \left[ c^2 \left( t' \pm \frac{v}{c^2} x' \right)^2 - (x' + vt')^2 \right] \dots$$

Prima di procedere oltre, riconsideriamo la classificazione degli intervalli introdotta in eq. (41). Nel caso di intervallo time-like (per semplicità consideriamo il caso di una sola dimensione spaziale), avremo  $(ct)^2 > x^2$  e, quindi,  $|x/t| < c$ . Il significato fisico di tale affermazione, apparentemente banale, è che eseguendo la trasformazione di Lorentz  $x' = \gamma(x - vt)$ , potremo scegliere un sistema di riferimento la cui velocità relativa è  $|v| = |x/t| < c$  e, pertanto, possiamo avere  $x' = 0$ . In altre parole, abbiamo dimostrato che, nel caso  $s^2 > 0$ , è sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui due eventi avvengano nello stesso punto. Inoltre i due eventi sono causalmente connessi, essendo possibile muoversi tra essi con velocità inferiore a quella della luce. L'intervallo di tempo quando i due eventi avvengono nello stesso posto è il **tempo proprio**.

Nel caso di intervallo space-like ( $s^2 < 0$ ) si ha  $(ct)^2 < x^2$  e, quindi,  $|x/t| > c$ . Eseguendo la trasformazione di Lorentz  $t' = \gamma(t - \beta x/c)$ , sarà sempre possibile scegliere una velocità  $v = c^2/tx$  tale che  $t' = 0$ , ovvero esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei e dove la distanza che li separa è la **lunghezza propria**.

Infine, nel caso di intervallo light-like ( $s^2 = 0$ ) si ha  $(ct)^2 = x^2$  e, quindi,  $|x/t| = c$ , condizione vera in tutti i sistemi di riferimento, per cui non risulta possibile definire un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengano o allo stesso tempo o nello stesso punto.

### 2.1.17 Esercizio

In un certo sistema di riferimento l'evento 1 avviene a  $(0,0)$  e l'evento 2 a  $(1,2)$ . Si definisca un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei.

Il sistema di riferimento si muove con velocità  $v = c/2$ ; si veda la Fig. 28 per una rappresentazione grafica.

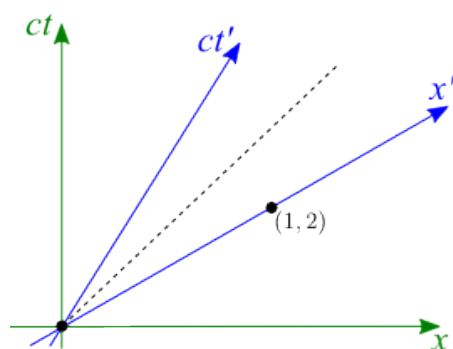


Fig. 28: Diagramma spaziotemporale della situazione proposta nell'esercizio 2.1.17.

**2.1.18 Esercizio**

Si dimostri che nella trasformazione di Lorentz da un sistema  $S'$  a uno  $S$  (vedi Fig. 29) risulta:

$$\tan \vartheta_1 = \tan \vartheta_2 = \beta, \quad \frac{\text{un}(ct')}{\text{un}(ct)} = \frac{\text{un}(x')}{\text{un}(x)} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (127)$$

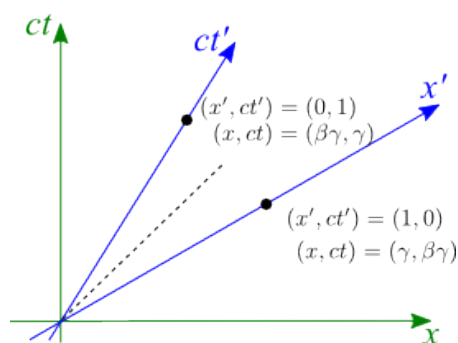


Fig. 29: Trasformazione delle unità spaziali.

**2.1.19 Esercizio**

Si utilizzino i diagrammi di Minkowski per trattare i seguenti problemi:

1. La velocità relativa tra i sistemi  $S'$  e  $S$  è  $v$  ed è diretta nel verso positivo dell'asse delle  $x$ . Un'asta di lunghezza unitaria giace in  $S'$ ; se un osservatore in  $S$  misura la sua lunghezza, qual è il risultato?
  2. Se l'asta giace sull'asse  $x$  ed è dunque ferma nel sistema  $S$  se la si misura in  $S'$  qual è il risultato?
1. Da un punto di vista diagrammatico avremo quanto illustrato in Fig. 30. La lunghezza della sbarra nel sistema di riferimento  $S'$  è  $AC$ ; l'osservatore in  $S$  misurerà solo la porzione della sbarra presente agli stessi istanti. La misura delle coordinate della sbarra (iniziali

e finali) fatte a  $t = 0$  è pari al segmento AB, che si ottiene tramite l'intersezione della parallela a  $ct'$ , passante per C, con l'asse delle  $x$  (si ricordi la descrizione in termini di “world tube” di Fig. 20). Da un punto di vista geometrico avremo

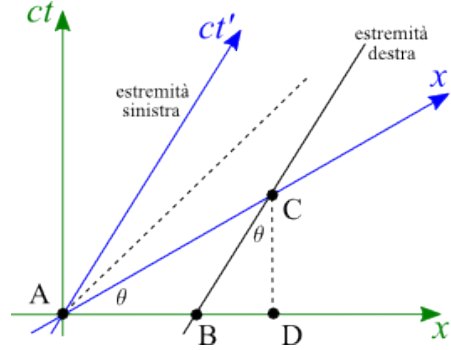


Fig. 30: Primo problema.

$$AB = AD - BD = AC \cos \vartheta - AC \sin \vartheta \tan \vartheta$$

e, pertanto, in base alla (127)

$$AB = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \cos \vartheta (1 - \tan^2 \vartheta) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} (1 - \beta^2) = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

2. In base al Principio di Relatività dovremo giungere alla medesima conclusione. Dal punto di vista diagrammatico la situazione è quella riportata in Fig. 31 e le relative considerazioni geometriche seguono quanto esposto in precedenza.

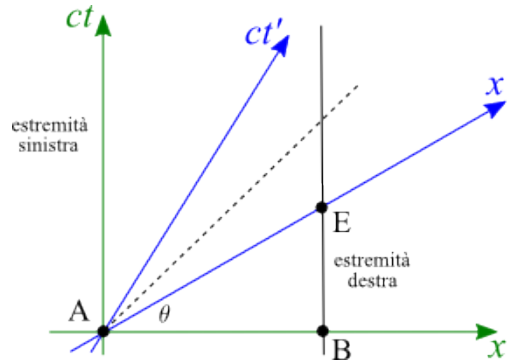


Fig. 31: Secondo problema.

### 2.1.20 Esercizio

*Discutere l'utilizzo dei diagrammi di Minkowski per verificare la reciprocità degli effetti della dilatazione temporale tra due sistemi di riferimento in moto relativo con velocità  $0.6c$ .*

Nel riquadro di sinistra della Fig. 32 assumeremo che lungo l'asse accentato venga letto (in opportune unità) un tempo pari a 4, mentre l'osservatore nel sistema non accentato misurerà, invece, un tempo dilatato pari a 5. (Si noti che la figura riporta correttamente la differenza tra le unità; si invita il lettore a verificare). Nel riquadro di destra di Fig. 32 si ha la situazione speculare: il tempo 4, misurato nel sistema non accentato, è 5 in quello accentato.

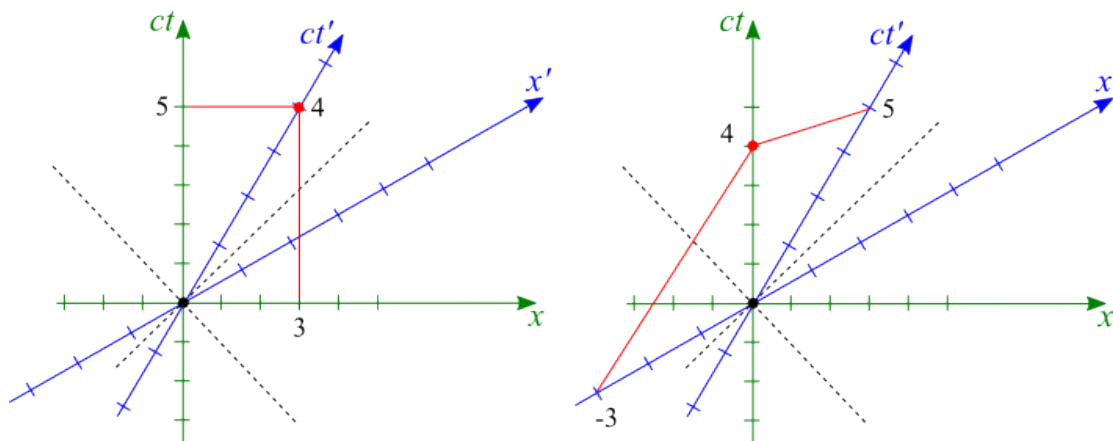


Fig. 32: Tempo dell'osservatore nel sistema accentato (sinistra), e in quello non accentato (destra).

### 2.1.21 Esercizio

Si utilizzi il metodo dei diagrammi di Minkowski per spiegare l'osservazione sperimentale della dilatazione dei tempi nel caso del decadimento del muone (si utilizzi  $v_\mu = 075 c$ ). Si calcoli inoltre la frazione dei muoni osservati ad una distanza di 2 km dal punto in cui sono stati prodotti. (Per la prima parte del quesito si faccia riferimento alla Fig. 33).

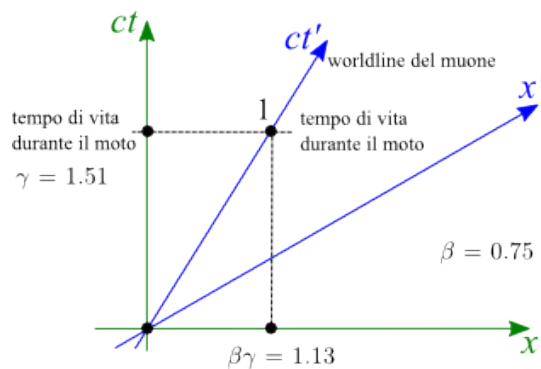


Fig. 33: Diagramma di Minkowski per il decadimento del muone.

### 2.1.22 Esercizio

Cercheremo di chiarire il supposto paradosso dei gemelli utilizzando i diagrammi di Minkowski.

Nella Fig. 34 indichiamo con  $A_1$  l'evento che caratterizza il punto di separazione dei due gemelli. L'assunzione che qui viene fatta è che lo stesso punto sia relativo a due diversi sistemi di riferimento: quello del gemello in “quiete”, e quello del gemello in “moto”. I due diversi sistemi di riferimento, con le relative unità di misura, sono mostrati nella parte inferiore della figura. Indichiamo con  $B$  l'evento in cui il gemello in moto inverte la rotta e torna indietro e con  $A_2$

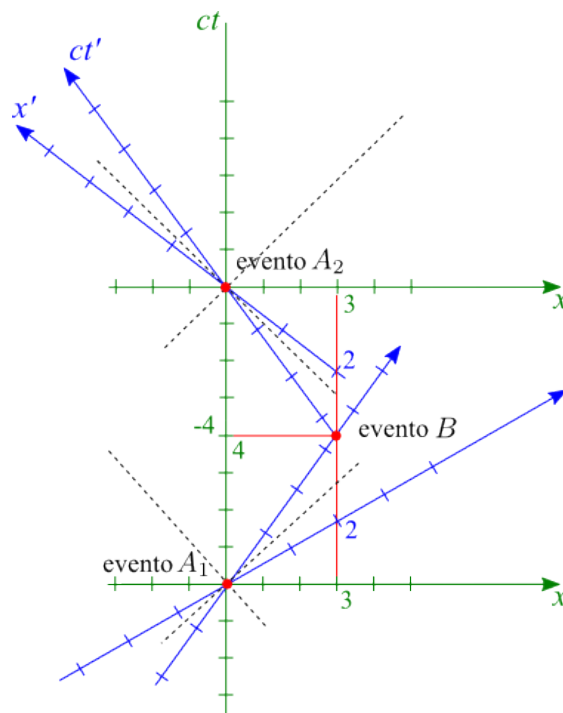


Fig. 34: Analisi qualitativa del paradosso dei gemelli.

l'evento che segna l'incontro dei due gemelli. Anche in questo caso si dovrà affrontare l'ambiguità dell'appartenenza di  $A_2$  a entrambi i sistemi di riferimento. È evidente che non siamo di fronte ad alcun paradosso, ma, più semplicemente, a un problema posto in maniera non corretta, per le seguenti ragioni:

- gli eventi devono appartenere a sistemi distinti (quello proprio o quello in moto) e in questo caso non avremmo alcun effetto paradossale: ognuno dei gemelli è in moto, per l'altro, con la stessa velocità relativa (a parte il verso);
- il gemello in moto per raggiungere la sua velocità deve essere sottoposto ad un'accelerazione, e, quindi, non verifica, per tutta la sua storia cinematica, la condizione che lo rende un osservatore inerziale: ad esso non sono applicabili i postulati della Relatività Ristretta;
- in entrambi i casi non esisterebbe dunque alcun paradosso, eppure il fratello viaggiatore è più giovane quando torna dal suo viaggio; una corretta analisi richiede la considerazione degli effetti dell'accelerazione (per una analisi - parzialmente<sup>21</sup> - corretta si veda [www2.ph.ed.ac.uk/teaching/course-notes/documents/62/1640-10.pdf](http://www2.ph.ed.ac.uk/teaching/course-notes/documents/62/1640-10.pdf))

<sup>21</sup> Si intende che il concetto di accelerazione all'interno del formalismo della Relatività Ristretta non è sufficiente, e che una trattazione soddisfacente richiederebbe l'ausilio del formalismo della Relatività Generale.

Invitiamo il lettore a utilizzare i diagrammi spaziotemporali per discutere il paradosso asta-granaio.

### 2.1.23 Esercizio

Un oggetto si muove con velocità  $v_1$  rispetto al sistema  $S'$ , che a sua volta si muove a velocità  $v_2$  rispetto a  $S$  (nello stesso verso del moto dell'oggetto). Qual è la velocità dell'oggetto rispetto al sistema  $S$ ? Si risolva il problema utilizzando il metodo dei diagrammi di Minkowski.

Facendo riferimento alla Fig. 35, il corpo in moto sarà specificato nel sistema  $S'$  dal punto P si

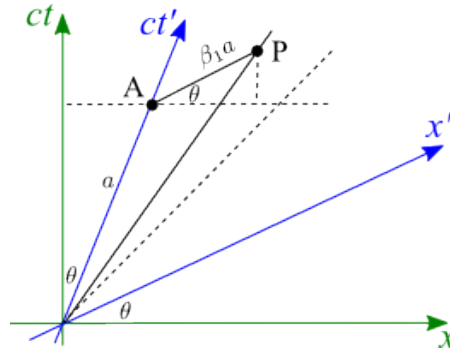


Fig. 35: Due sistemi in movimento.

tratta, quindi, di esprimere il segmento AP nel sistema di riferimento non accentato e dividerlo per l'intervallo di tempo corrispondente allo stesso sistema di riferimento. In formule avremo:

$$\beta_u = \frac{\sin \vartheta + \beta_1 \cos \vartheta}{\cos \vartheta + \beta_1 \sin \vartheta} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \quad (128)$$

### 2.1.24 Esercizio

In Fig. 36 si illustra il fenomeno dell'aberrazione stellare, secondo il quale nell'osservazione di una stella è necessario inclinare il telescopio per intercettare la luce proveniente da essa. Si dimostri che la velocità della luce proveniente dalla stella è indipendente dal moto della terra.

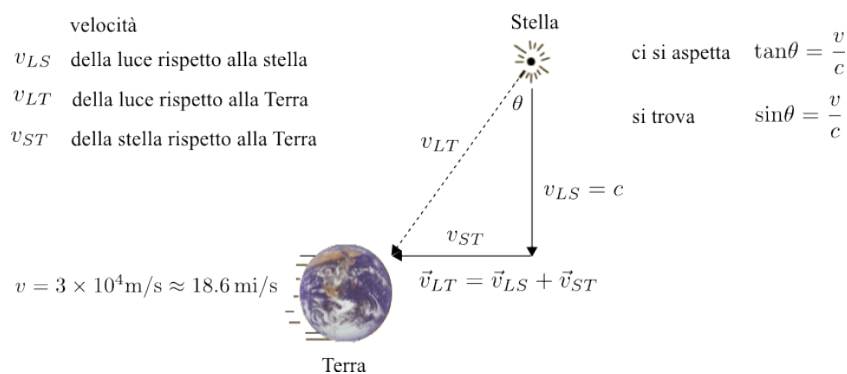


Fig. 36: Aberrazione stellare e composizione delle velocità.

### 2.1.25 Esercizio

Si consideri il seguente problema, noto come paradosso di Bell. Due astronavi identiche, inizialmente in moto con la stessa velocità, sono tenute insieme da un filo e ad un certo istante cominciano ad accelerare allo stesso modo. Aumentando velocità entrambe subiranno una contrazione relativistica: il filo si spezzerà?

### 2.1.26 Esercizio

Un corpo fermo in acqua galleggia, perché ha una densità di poco inferiore a quella del liquido; se viene messo in moto, anche a basse velocità, la contrazione di una delle sue dimensioni causa una diminuzione del volume e dunque un aumento della densità, cosa succede al corpo continua a galleggiare?

**Effetto Doppler** È ben noto, dalla fisica classica, che la frequenza di un'onda sonora può essere percepita in maniera diversa a seconda che venga emessa da una sorgente in moto o ferma. Il suono diventa più acuto (grave) se la sorgente si avvicina (allontana) da chi ascolta.

Indicando con  $f$  e  $v$ , rispettivamente, la frequenza e la velocità dell'onda, e con  $v_S$  la velocità del suono, la frequenza  $f'$  percepita da un osservatore fisso è (cfr. Fig. 37)

$$f' = \frac{f}{1 \mp \frac{v}{v_S}}, \quad (129)$$

dove il segno negativo (positivo) vale se la sorgente si avvicina (allontana).

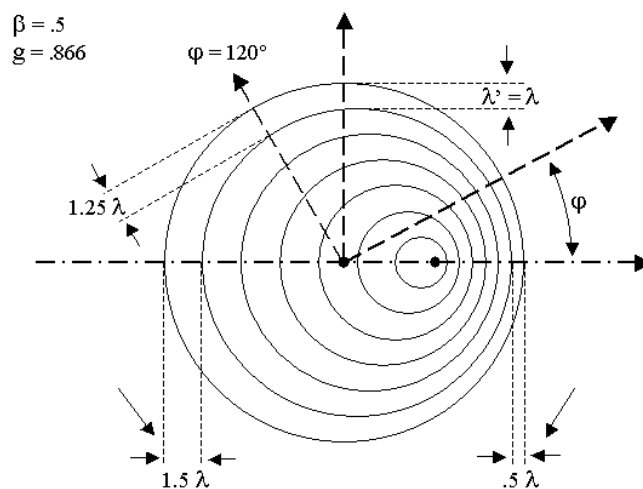


Fig. 37: Effetto Doppler classico.

Nel caso della radiazione elettromagnetica,  $v_S$  dovrà essere sostituito dalla velocità della luce, per cui

$$f' = \frac{f}{1 \mp \frac{v}{c}} \quad (130)$$

valida solo nel caso in cui la velocità della sorgente è molto inferiore a quella della luce. La generalizzazione al caso relativistico (Fig. 38) si ottiene piuttosto facilmente includendo l'effetto

della dilatazione dei tempi. Ricordando che la frequenza è legata al periodo dalla relazione  $f = 1/T$ , tenuto conto della dilatazione dei tempi (che si trasforma in una “contrazione” delle frequenze), otteniamo:

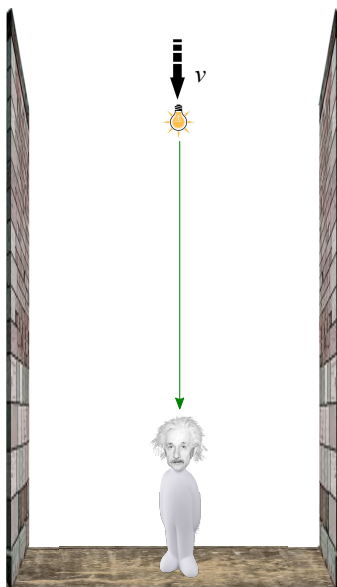


Fig. 38: Cinematica dell'effetto Doppler relativistico (sorgente in avvicinamento).

$$f' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 \mp \beta} f = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} f, \quad (131)$$

e, analogamente, per la lunghezza d'onda (si ricordi che  $\lambda f = c$ )

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} \lambda \quad (132)$$

Il seguente quesito insegna ad avere cautela quando si affrontano problemi relativi all'effetto Doppler relativistico. Si consideri quanto illustrato in Fig. 39, ovvero una cavità ottica di



Fig. 39: Cavità ottica.

lunghezza  $l$ , all'interno della quale è presente un campo elettromagnetico di lunghezza d'onda  $\lambda$ ; la relazione tra la lunghezza della cavità e il numero di lunghezze d'onda in essa contenuto è

$$n \lambda = \frac{l}{2}. \quad (133)$$

Se la cavità viene messa in moto a velocità relativistica, la sua lunghezza apparirà contratta ad un osservatore esterno mentre la lunghezza d'onda del campo al suo interno si trasformerà



secondo l'eq. (131), e i due membri della (133) divengono, rispettivamente:

$$n\lambda \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}, \quad \frac{L}{2} \sqrt{1-\beta^2},$$

e, quindi, la condizione (133) non è più valida: la radiazione non potrà essere contenuta all'interno della cavità, e l'osservatore fisso non vedrà alcun campo all'interno della cavità, in palese violazione al principio di conservazione dell'energia.

Come si risolve tale (apparente) contraddizione? Si spieghi perché la semplice contrazione delle lunghezze o la dilatazione dei tempi non è sufficiente a spiegare l'effetto Doppler relativistico. Con riferimento alla Fig. 40, si dimostri che, in generale, se la velocità della sorgente forma un angolo  $\theta$  con la direzione d'osservazione, si ha:

$$\lambda' = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (134)$$

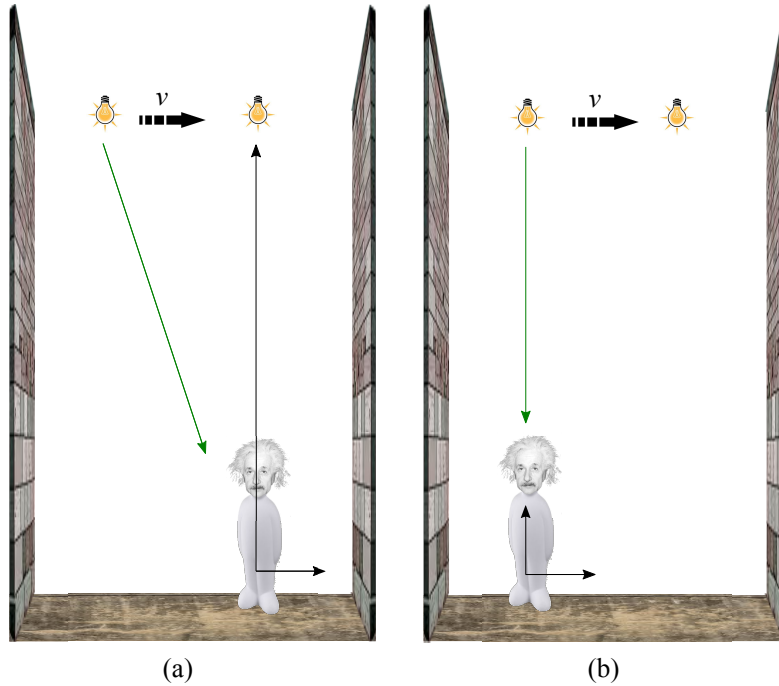


Fig. 40: Cinematica dell'effetto Doppler relativistico: a) angolo generico di osservazione; b) direzione di osservazione ortogonale alla direzione di moto.

Si spieghi il significato fisico dell'effetto Doppler nel caso di Fig. 40. Si derivino i risultati precedenti dalle trasformazioni di Lorentz.

Prima di concludere questo paragrafo, facciamo notare una differenza fondamentale tra l'effetto Doppler sonoro e quello relativistico riguardante la radiazione elettromagnetica. Nel caso delle onde sonore esistono due diversi tipi di effetto Doppler, a seconda se è l'osservatore o la sorgente a essere in moto. In quest'ultimo caso la frequenza è data da

$$f' = \left(1 \pm \frac{v}{v_s}\right) f. \quad (135)$$

Tale distinzione non può essere fatta nel caso dell'effetto Doppler relativistico. Perché? Il suono viene trasmesso tramite le vibrazioni di un mezzo. Si utilizzi quanto fino ad ora appreso per spiegare perché non esiste l'etere, ovvero il mezzo che secondo le teorie pre-relativistiche permetteva la propagazione della luce.

La conoscenza dell'effetto Doppler può essere utilizzata per discutere il paradosso dei gemelli. Giorgia, gemella di Giorgio, intraprende, all'età di 20 anni, un viaggio in astronave muovendosi con velocità  $0.8c$ , per raggiungere un pianeta distante 8 anni luce. Tenendo conto della dilatazione dei tempi, il tempo di Giorgia misurato da Giorgio sarà  $1/\sqrt{1-0.8^2} = 1/6$  del proprio, per cui, al ritorno dal pianeta per Giorgia saranno passati 12 anni, mentre per Giorgio 20. Sappiamo però che Giorgia può aver raggiunto analoghe conclusioni, perché lei avrebbe potuto considerare il fratello in moto a una velocità  $v = -0.8c$ , rispetto a lei.

Come sappiamo i due sistemi di riferimento non sono simmetrici, perché non sono inerziali e uno dei due ha dovuto accelerare per portarsi alla velocità di crociera e poi decelerare per fermarsi. Stante questa asimmetria, possiamo fare i calcoli dal punto di vista di Giorgio (come già fatto), e dal punto di vista di Giorgia, come faremo adesso, evitando però di tener conto delle accelerazioni. Assumendo che i due gemelli si spediscono dei segnali a intervalli di un anno, la frequenza con cui questi segnali sono spediti può essere calcolata tenendo conto dell'effetto Doppler relativistico, per cui

$$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0. \quad (136)$$

La velocità ridotta è  $\beta = -0.8$  quando Giorgia si allontana,  $\beta = +0.8$  quando si avvicina, per cui all'andata misurerà una frequenza pari a  $1/3$  (ovvero un segnale ogni tre anni), mentre al ritorno una frequenza pari a 3 (3 segnali l'anno). È dunque evidente che il tempo trascorso per il fratello è  $(1/3) \times 6 + 3 \times 6 = 20$ .

## 2.2 Cinematica relativistica

Cominceremo ad affrontare alcuni problemi di cinematica relativistica da un punto di vista “pratico”, ovvero ci riferiremo a casi concreti, ricorrenti in situazioni sperimentali.

Partiremo pertanto da alcune premesse riguardanti questioni di gergo. Quando si parla di condizioni cinematiche relativistiche si fa riferimento a moti con velocità non trascurabili rispetto a quella della luce nel vuoto. La velocità dipende dall'energia cinetica della particella, che, come già visto, è data da:

$$E_K = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (137)$$

dove  $m_0$  è la massa di riposo della particella, alla quale viene associata l'energia di riposo  $m_0 c^2$ , per cui si usa esprimere la massa delle particella in unità di energia. È inoltre evidente, dalla (137), che

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E_K + m_0 c^2} \right)^2}. \quad (138)$$

Potremo dunque concludere che una energia cinetica di 1 MeV è sufficiente per rendere un elettrone (massa di riposo 0.511 MeV) relativistico, ma non un protone, la cui massa è di circa 938 MeV.

In fisica delle alte energie si usano specificare le condizioni cinematiche di una particella attraverso il momento espresso in  $\text{MeV}/c$ . Tale modo di definire le cose è semplicemente dovuto al fatto che

$$p = m_0 \gamma v = m_0 c \beta = \beta \frac{E}{c}, \quad E = m_0 \gamma c^2. \quad (139)$$

Abbiamo anche visto che si usa distinguere tra variabili del centro di massa e variabili del laboratorio. Molto spesso si utilizzano i termini di urto (scattering) nel centro di massa e su bersaglio fisso. Un esempio in tal senso è rappresentato in Fig. 41, dove vengono mostrati due modi di operazione del Tevatron al Fermilab di Chicago. Nel caso di urto nel centro di massa un protone ed un antiprotone, accelerati in un acceleratore circolare, vengono fatti collidere (con la stessa energia) uno contro l'altro; nel caso di urto su bersaglio fisso uno dei due fasci viene estratto e viene “sparato” su un bersaglio di idrogeno (e quindi essenzialmente protoni). I seguenti problemi chiariscono la differenza tra i due modi di operazione.

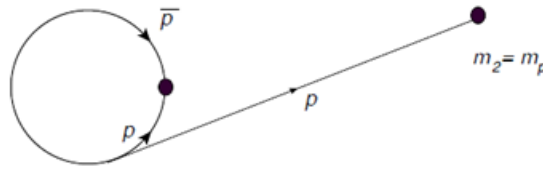


Fig. 41: Collisioni nel centro di massa e su bersaglio fisso; diversi modi di funzionamento del Tevatron.

### 2.2.1 Esercizio

Qual è l'energia, nel centro di massa (CM), di un sistema di due particelle formato da un antiprotone con energia totale di  $10 \text{ GeV}$  nel laboratorio (L) e un protone fermo?

I dati del problema sono dunque i seguenti

$$p_1^\mu \equiv (E_{1,L}, c \vec{p}_1), \quad p_2^\mu \equiv (m_2 c^2, 0).$$

Il calcolo della massa invariante, equivalente all'energia del centro di massa, fornisce la seguente relazione

$$E_{CM} = c^2 \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_1 E_{1,L}}{c^2}}, \quad (140)$$

che, nel caso specifico ( $m_1 = m_2 = m_p$ ), diviene:

$$E_{CM} = \sqrt{2} m_p c^2 \sqrt{1 + \frac{E_1}{m_p c^2}} \simeq 15.46 \text{ GeV} \quad (141)$$

Si noti che nel caso in cui  $E_1 \gg m_p c^2$ , la formula precedente si riduce a

$$E_{CM} \simeq \sqrt{2 E_1 m_p c^2}. \quad (142)$$

Chiediamoci ora quale sia il significato fisico delle formule precedenti. È opportuno notare che nel formulare il problema abbiamo fatto riferimento a un “sistema di particelle” e non abbiamo ipotizzato altro. Possiamo dunque dire che tale sistema ha a disposizione un “budget” di energia dato dalla eq. (140) da utilizzare in processi, quali, ad esempio, un urto. Nel caso in cui il

protone urti il bersaglio, l'energia (140), ora impropriamente detta del centro di massa, è quanto ha a disposizione per produrre prodotti secondari.

Nel caso in cui si abbia

$$p_1^\mu \equiv (E_{1,L}, c\vec{p}_1), \quad p_2^\mu \equiv (E_{2,L}, -c\vec{p}_2)$$

si ottiene

$$E_{CM} = E_1 + E_2,$$

e, dunque, l'energia di cui il sistema dispone è pari alla somma delle energie dei singoli fasci. Nel caso del Tevatron l'energia massima per fascio è di 980 GeV e, pertanto, si ha a disposizione, una energia totale di 1960 GeV, nel centro di massa, e 42.7 GeV nel laboratorio. Il primo modo di operazione è conveniente per lo studio di fenomeni alla più alta energia possibile; il secondo è più conveniente quando si vogliono creare fasci secondari ed è stato cruciale per la scoperta del neutrino  $\nu_\tau$ .

### 2.2.2 Esercizio

Si calcoli l'energia nel centro di massa di un kaone di momento  $0.8 \text{ GeV}/c$  incidente su un bersaglio di protoni.

Ricordando che la massa del kaone è circa 495 MeV, dalla eq. (140) si ottiene  $E_{CM} \simeq 1.6 \text{ GeV}$ .

### 2.2.3 Esercizio

Con riferimento all'esercizio 2.2.1, si dimostri che la velocità del centro di massa e il fattore relativistico associato sono:

$$\beta_{CM} = \frac{cp_1}{E_{1,L} + m_2 c^2}, \quad \gamma_{CM} = \frac{E_{1,L} + m_2 c^2}{E_{CM}}. \quad (143)$$

Si noti che il passaggio dal sistema di riferimento del laboratorio al centro di massa è dato dalla trasformazione di Lorentz descritta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \gamma_{CM} & -\gamma_{CM} \beta_{CM} \\ -\gamma_{CM} \beta_{CM} & \gamma_{CM} \end{pmatrix} \quad (144)$$

Dalla condizione  $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0$  si ottiene relazione<sup>22</sup>:

$$-\gamma_{CM} \beta_{CM} m_2 c^2 = \gamma_{CM} p_{1,L} + \gamma_{CM} \beta_{CM} E_{1,L},$$

da cui è possibile ricavare la velocità del centro di massa.

### 2.2.4 Esercizio

Si determini quale debba essere nel laboratorio l'energia  $E_L$  di un fascio di protoni incidente su un bersaglio fisso di protoni, affinché si ottenga la stessa energia totale nella collisione frontale ("head on") di due fasci (protoni-antiprotoni) di uguale energia  $E$ .

$$E_L = m_p c^2 (2\gamma_p^2 - 1), \quad \left( \gamma_p = \frac{E}{m_p c^2} \right) \quad (145)$$

<sup>22</sup> Qui, e nel seguito, le variabili con asterisco si riferiscono al sistema del CM

### 2.2.5 Esercizio

Si estenda il risultato precedente al caso di fasci di masse ed energie diverse.

$$E^* = m_1 c^2 \left[ 2 \gamma_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \right]. \quad (146)$$

### 2.2.6 Esercizio

Si dimostri che l'energia del centro di massa di due fasci con uguale energia e massa, collidenti con angolo  $\alpha$  è data da:

$$E_L = 2 E \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (147)$$

### 2.2.7 Esercizio

Si consideri un sistema composto di due particelle e si determini la massa invariante del sistema; si derivi inoltre la stessa nel centro di massa e si scrivano le trasformazioni di Lorentz tra il sistema del centro di massa e quello del laboratorio.

I dati del problema sono

$$p_1^\mu \equiv (E_{1,L}, c \vec{p}_1) \quad p_2^\mu \equiv (E_{2,L}, c \vec{p}_2)$$

e poiché  $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \vartheta$ , si ottiene

$$E_{CM} = p_1^\mu p_{2,\mu} = c^2 \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_{1,L} E_{2,L} (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \vartheta)}.$$

Applicando la stessa procedura del precedente esercizio, si trova che la trasformazione di Lorentz da un sistema all'altro è realizzata tramite

$$\beta_{CM} = c \frac{p_{1,L} + p_{2,L}}{E_{1,L} + E_{2,L}} \quad \gamma_{CM} = \frac{E_{1,L} + E_{2,L}}{E_{CM}}. \quad (148)$$

Un decadimento a due corpi è un processo del tipo descritto in Fig. 42 in cui una particella decade producendo due altre particelle. Come abbiamo già visto, le condizioni cinematiche che permettono il decadimento sono dettate dalle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.

### 2.2.8 Esercizio

Si consideri una particella di massa  $M$ , ferma nel sistema di riferimento del laboratorio, che decade in due particelle con masse  $m_1$  e  $m_2$ . Si determinino l'energia e gli impulsi dei prodotti di decadimento.

Dati del problema:

$$p_1^\mu \equiv (E_1, c \vec{p}), \quad p_2^\mu \equiv (E_2, -c \vec{p}), \quad P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \equiv (M c^2, 0).$$

La soluzione si riduce dunque a quella del seguente sistema di equazioni

$$E_k^2 = c^2 p_k^2 + m_k^2 c^4 \quad (k = 1, 2) \quad E_1 + E_2 = M c^2,$$

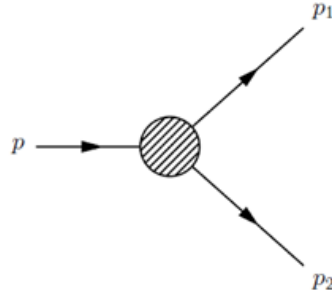


Fig. 42: Decadimento a due corpi.

da cui si ricava (gli asterischi denotano le variabili del centro di massa):

$$E_1 = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad E_2 = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}$$

$$|\vec{p}| = c \frac{\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{2M}. \quad (149)$$

### 2.2.9 Esercizio

Consideriamo ora il caso del decadimento a due corpi di una particella in volo, dimostrando che l'energia della particella 1 è data da

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{M}^2 c^2 E_0 \pm c p_0 \cos \vartheta_1 \sqrt{(\tilde{M} c)^4 - 4(m_1 c)^2 [(M c)^2 + (p_0 \sin \vartheta_1)^2]}}{(M c)^2 + (p_0 \sin \vartheta_1)^2}, \quad (150)$$

dove  $\tilde{M}^2 = M^2 + m_1^2 - m_2^2$  e si è indicato con  $\vartheta_1$  l'angolo formato dall'impulso della particella 1 con quello della particella iniziale, le cui variabili dinamiche sono contrassegnate con il pedice 0. Dati del problema:

$$P_0^\mu \equiv (E_0, 0, 0, p_0) \quad p_k^\mu \equiv (E_k, \vec{p}_k) \quad (k = 1, 2).$$

dove abbiamo assunto come asse  $z$  del riferimento del laboratorio la direzione di moto della particella 0.

Il problema è risolubile generalizzando la procedura precedente, ovvero scrivendo:

$$E_k^2 = c^2 |\vec{p}_k|^2 + (m_k c^2)^2 \quad (k = 1, 2) \quad P_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu.$$

da cui si ottiene facilmente:

$$E_1 - E_2 = \frac{c^2 (|\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_0 - \vec{p}_1|^2) + (m_1^2 - m_2^2) c^4}{E_0}$$

La relazione

$$|\vec{p}_0 - \vec{p}_1|^2 = |\vec{p}_0|^2 + |\vec{p}_1|^2 - 2 |\vec{p}_0| |\vec{p}_1| \cos \vartheta_1,$$

tenuto conto della relazione relativistica tra energia e impulso, e posto

$$A = \frac{\tilde{M}^2 c^3}{2 |\vec{p}_0| \cos \vartheta_1}, \quad B = \frac{E_0}{c |\vec{p}_0| \cos \vartheta_1},$$

consente di scrivere la seguente equazione di secondo grado per  $E_1$

$$(B^2 - 1) E_1^2 - 2 A B E_1 + A^2 + m_1^2 c^4 = 0$$

da cui segue la (150).

Esaminiamo ora meglio le relazioni precedenti per comprenderne il significato fisico. Notiamo prima di tutto che, si veda la (149),

$$\frac{\tilde{M}^4 - 4(m_1 M)^2}{4} c^4 = (M c p^*)^2, \quad E_1^* = \frac{\tilde{M}^2 c^2}{2 M}.$$

Potremo pertanto riscrivere l'eq. (150) come  $(\gamma_0 = E_0/Mc^2)$

$$E_1 = \gamma_0 \frac{E_1^* \pm \beta_0 c \cos \vartheta_1 \sqrt{|\vec{p}^*|^2 - (m_1 \gamma_0 \beta_0 c \sin \vartheta_1)^2}}{1 + (\gamma_0 \beta_0 \sin \vartheta_1)^2} \quad (151)$$

Il fatto che l'energia debba essere una variabile reale implica che

$$\sin \vartheta_1 \leq \frac{M p_0^*}{m_1 p_0}.$$

Se  $M p_0^* > m_1 p_0$  la relazione precedente è soddisfatta per tutti gli angoli; se  $M p_0^* < m_1 p_0$  esisterà un angolo massimo

$$\vartheta_1^{\max} = \arcsin \left( \frac{M p_0^*}{m_1 p_0} \right).$$

La (151) può essere riscritta in forma più compatta come segue:

$$E_1 = \bar{\gamma}_0 (\epsilon_1 \pm \bar{\beta}_0 c |\vec{\pi}_1|)$$

dove

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + (\gamma_0 \beta_0 \sin \vartheta_1)^2}}, \quad \bar{\beta}_0 = \beta_0 \cos \vartheta_1,$$

ed è stato introdotto il quadrivettore ausiliario  $\pi^\mu = (\epsilon_1, \vec{\pi}_1)$ , con:

$$\epsilon_1 = \frac{E_1^*}{\sqrt{1 + (\gamma_0 \beta_0 \sin \vartheta_1)^2}}, \quad |\vec{\pi}_1| = \sqrt{\frac{|\vec{p}^*|^2 - (m_1 \gamma_0 \beta_0 c \sin \vartheta_1)^2}{1 + (\gamma_0 \beta_0 \sin \vartheta_1)^2}}.$$

È opportuno notare che il quadrivettore  $\pi^\mu$  è ottenuto dal quadrimpulso della particella 1 nel riferimento del CM tramite la trasformazione di Lorentz definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_0 & \bar{\gamma}_0 \bar{\beta}_0 \\ \bar{\gamma}_0 \bar{\beta}_0 & \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix}.$$

L'esercizio che segue chiarisce l'utilità pratica dei precedenti risultati.

### 2.2.10 Esercizio

Si considerino i seguenti decadimenti

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

e si assuma che la particella iniziale abbia un'energia nel laboratorio di 20 GeV. Si determini l'angolo massimo e i momenti di tutti i prodotti di decadimento.

Si usino i seguenti valori per le masse delle particelle coinvolte:  $m_\Lambda = 1116$  MeV,  $m_p = 938$  MeV,  $m_K = 498$  MeV,  $m_{\pi^\pm} = 139.6$  MeV,  $m_{\pi^0} = 135$  MeV.

### 2.2.11 Esercizio

Si dimostri che in un decadimento a due corpi l'angolo  $\vartheta_1$  che uno dei prodotti di decadimento forma con la direzione della particella iniziale è legato all'angolo  $\vartheta_1^*$  del centro di massa dalla seguente trasformazione

$$\tan \vartheta_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta_1^*}{\frac{v_0}{v_1^*} + \cos \vartheta_1^*}. \quad (152)$$

Nel caso di particelle prive di massa come il fotone, il quadrivettore impulso è  $k^\mu \equiv \hbar(\omega, c\vec{k})$ , con  $k_\mu k^\mu = 0$ , dove  $\omega$  e  $\vec{k}$  sono, rispettivamente, la pulsazione angolare e il vettore d'onda del fotone.

### 2.2.12 Esercizio

Si studino le condizioni cinematiche del decadimento del pione neutro in due fotoni  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Dalla relazione ( $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$ ,  $\vec{p}_i = \hbar\vec{k}_i$ )

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - c^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (m_{\pi^0} c^2)^2$$

si ottiene facilmente

$$\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{m_{\pi^0} c^2}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}. \quad (153)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra i due fotoni (nel sistema del laboratorio). Quindi

In un processo di scattering come quello mostrato in Fig. 43 sono di particolare utilità le

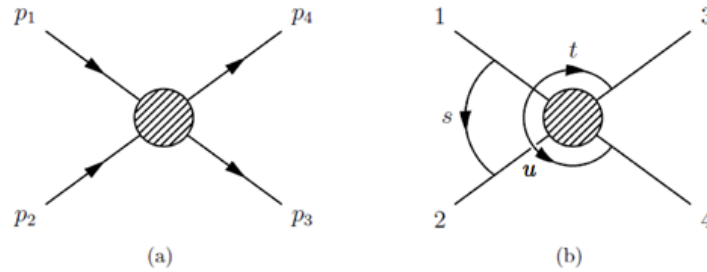


Fig. 43: Scattering a due corpi e variabili di Mandelstam.

cosiddette variabili di Mandelstam definite come segue:

$$s = (p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)_\mu, \quad t = (p_1 - p_3)^\mu (p_1 - p_3)_\mu, \quad u = (p_1 - p_4)^\mu (p_1 - p_4)_\mu. \quad (154)$$

### 2.2.13 Esercizio

Si dimostri che

$$s + t + u = m^2 c^4, \quad m^2 = \sum_{k=1}^4 m_k^2. \quad (155)$$

Suggerimento: si tenga conto che della conservazione del quadrimpulso totale.



### 2.2.14 Esercizio

Si dimostri che nel processo di scattering  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  con

$$p_1^\mu \equiv (E_L, 0, 0, p_L), \quad p_2^\mu \equiv (m_2 c^2, 0, 0, 0)$$

valgono le seguenti identità (le quantità asteriscate si riferiscono al centro di massa)

$$E_L = \frac{s - (m_1^2 + m_2^2) c^4}{2 m_2 c^2}, \quad p_L = \frac{1}{2 m_2 c^3} \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2 c^4] [s - (m_1 - m_2)^2 c^4]} \quad (156)$$

$$|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| = p_L \frac{m_2 c^2}{\sqrt{s}}, \quad E_{1,2}^* = \frac{m_{1,2}^2 c^4 + m_2 c^2 E_L}{\sqrt{s}} \quad (s = (E_1^* + E_2^*)^2). \quad (157)$$

### 2.2.15 Esercizio

Si consideri la funzione

$$\lambda(p, q, r) = [p - (\sqrt{q} + \sqrt{r})^2] [p - (\sqrt{q} - \sqrt{r})^2] \quad (158)$$

detta funzione di Källen e si dimostri che

$$\lambda(p, q, r) = \lambda(q, p, r) = \lambda(p, r, q). \quad (159)$$

### 2.2.16 Esercizio

Si dimostri che l'impulso nel CM nel caso dell'esercizio 2.2.8 si può porre nella forma

$$|\vec{p}^*| = c \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}}{2 M}. \quad (160)$$

Riesprimere i risultati dell'Esercizio ex:2body in termini della funzione di Källen

Un processo di scattering a due corpi può essere visualizzato nel sistema del centro di massa come illustrato in Fig. 44. È evidente che l'angolo di scattering (nel centro di massa) è dato da:

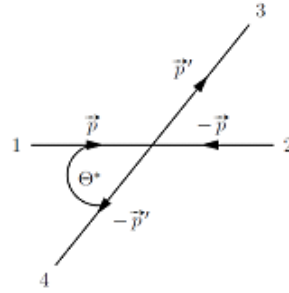


Fig. 44: Scattering a due corpi nel CM.

$$\cos \Theta^* = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}'}{|\vec{p}| |\vec{p}'|}. \quad (161)$$

**2.2.17 Esercizio**

Si dimostri che

$$\cos \Theta^* = \frac{s(t-u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}. \quad (162)$$

Si noti che

$$t = (p_1 - p_3)^\mu (p_1 - p_3)_\mu = (p_2 - p_4)^\mu (p_2 - p_4)_\mu$$

**2.2.18 Esercizio**

Si commenti il significato fisico delle relazioni precedenti.

**2.2.19 Esercizio**

La reazione di fusione  $D + T \rightarrow He + n + 17.6 \text{ MeV}$ , dove  $D$  e  $T$  indicano, rispettivamente, il nucleo di deuterio e trizio. Assumendo che il deutone e il trizio siano inizialmente fermi, si determini l'impulso del nucleo di elio e del neutrone presenti nello stato finale.

Posto

$$p_{D,T}^\mu \equiv (m_{D,T} c^2, \vec{0}), \quad p_{He}^\mu \equiv (E_{He}, \vec{p}), \quad p_n^\mu \equiv (E_n, -\vec{p})$$

si ha ( $M = m_D + m_T, E_0 = 17.6 \text{ MeV}$ ):

$$\Delta = M c^2 - E_0 = c \left\{ \sqrt{(m_{He} c)^2 + |\vec{p}|^2} + \sqrt{(m_n c)^2 + |\vec{p}|^2} \right\}$$

Si tenga conto del fatto che le energie cinetiche in gioco sono molto minori delle masse delle particelle che partecipano alla reazione, per cui, essendo

$$\sqrt{1+x^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} x^2$$

si ha:

$$\Delta \simeq (m_{He} c)^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{|\vec{p}|}{m_{He} c} \right)^2 \right] + (m_n c)^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{|\vec{p}|}{m_n c} \right)^2 \right]$$

da cui segue

$$|\vec{p}| \simeq \sqrt{\Delta - (m_{He}^2 + m_n^2) c^2}.$$

**2.3 Dinamica relativistica****2.3.1 Esercizio**

Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = c \sqrt{p^2 + (m c)^2},$$

e si derivino le equazioni del moto.

Dalle equazioni di Hamilton si ha

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p c}{\sqrt{p^2 + (m c)^2}}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

da cui si ottiene:

$$p = \frac{m \dot{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}} \quad (163)$$

in accordo con quanto ottenuto per via puramente cinematica nella prima parte degli appunti.

### 2.3.2 Esercizio

L'Hamiltoniana  $H = c \sqrt{p^2 + (m c)^2} - F x$  descrive la dinamica di una particella relativistica soggetta a un potenziale lineare. Si utilizzino le equazioni di Hamilton per confermare l'eq. (93). Considerare che:

$$\dot{x} = \frac{p c}{\sqrt{p^2 + (m c)^2}} \quad \dot{p} = F,$$

da cui, nell'ipotesi di  $p|_{t=0} = 0$ , segue:

$$\dot{x} = \frac{F c t}{\sqrt{(F t)^2 + (m c)^2}} \quad \dots$$

### 2.3.3 Esercizio

Si dimostri che il moto unidimensionale di una particella relativistica nel piano  $(x, t)$  è un moto iperbolico. Si consideri il caso di un elettrone inizialmente fermo ( $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ ) soggetto ad un campo elettrico costante di  $10 \text{ kV/m}$ , e si determini per quali valori del tempo le differenze tra i due moti diventano apprezzabili ( $\geq 5\%$ ).

### 2.3.4 Esercizio

Si dimostri la validità del teorema dell'energia cinetica anche nel caso relativistico.

### 2.3.5 Esercizio

Si studino le equazioni di moto di una particella relativistica soggetta ad un potenziale armonico. L'Hamiltoniana in questo caso è

$$H = c \sqrt{p^2 + (m c)^2} + \frac{1}{2} k x^2$$

e le relative equazioni di Hamilton sono

$$\dot{x} = \frac{p c}{\sqrt{p^2 + (m c)^2}}, \quad \dot{p} = -k x$$

che combinate insieme, forniscono la seguente equazione non lineare per l'impulso ( $\Pi = p/m c$ )

$$\ddot{\Pi} = -\Omega^2 \frac{\Pi}{\sqrt{1 + \Pi^2}} \quad \left( \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right), \quad (164)$$

le cui soluzioni sono oscillatorie solo nel limite nonrelativistico, ovvero per valori dell'impulso tali che  $\Pi \gg 1$ .

### 2.3.6 Esercizio

*Si spieghi perché l'oscillatore armonico relativistico non dà luogo ad un moto armonico.*  
Si noti che il periodo tende ad aumentare al crescere dell'ampiezza delle oscillazioni.

### 2.3.7 Esercizio

Utilizzando l'eq. (164) si mostri che la seguente quantità

$$I = \frac{1}{2} \dot{\Pi}^2 + \Omega^2 \sqrt{1 + \Pi^2}$$

è un invariante del moto. Qual è il significato fisico di  $I$ ?

### 2.3.8 Esercizio

*Si dimostri che la velocità di una particella carica relativistica in moto in un campo magnetico rimane costante in modulo.*

Una particella carica in moto con velocità  $\vec{v}$  è soggetta alla forza di Lorentz, ovvero

$$\frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}) = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \left( \gamma = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) \quad (165)$$

Moltiplicando, scalarmente, ambo i membri di questa equazione per il vettore velocità si ottiene:

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}) = 0.$$

ovvero

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{|\vec{v}|^2}{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \right) = 0,$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt}|\vec{v}| = 0.$$

### 2.3.9 Esercizio

*Si utilizzino i risultati dell'esercizio precedente per dimostrare che la particella compie un'orbita circolare e se ne determini il raggio.*

Come dimostrato nell'esercizio precedente  $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ , ovvero la direzione della forza è perpendicolare a quella della velocità, come accade nel moto circolare. Il raggio si ottiene uguagliando il modulo dell'accelerazione centrifuga a quello dell'accelerazione indotta dalla forza di Lorentz, ovvero

$$m \gamma \frac{v^2}{R} = q v B$$

da cui segue:

$$R = \frac{m \gamma v}{q B} \quad (166)$$

Il sincrotrone (Fig. 45) è una macchina acceleratrice circolare, il cui principio di operazione è quello di far acquisire energia a una particella (elettrone, protone, ...) in moto su un'orbita

circolare stabile. L'energia viene impartita tramite cavità a radio-frequenza poste lungo le orbite e il campo magnetico viene fatto variare nel tempo, in maniera tale che esso sia compatibile con il raggio massimo dell'orbita (fissata dalle dimensioni della macchina) e con l'energia massima della particella.

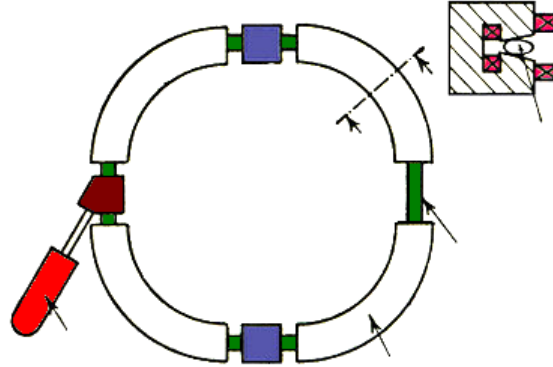


Fig. 45: Schema di un sincrotrone.

### 2.3.10 Esercizio

Si dimensiona un protosincrotrone di energia massima pari a 30 GeV utilizzando un campo magnetico di 3 T.

Dalla eq. (166) si ricava la seguente formula pratica (lo si dimostri)

$$R [\text{m}] \simeq 3.3 \frac{p [\text{GeV}/c]}{B [\text{T}]} . \quad (167)$$

da cui segue  $R \simeq 33 \text{ m}$ .

### 2.3.11 Esercizio

Si consideri il cosiddetto ciclotrone di Lawrence illustrato in Fig. 46 dove un protone si muove in un campo magnetico costante acquisendo energia dopo aver attraversato le “gap” della camera da vuoto, all'interno delle quali è presente un campo a radio-frequenza. Se le dimensioni della macchina sono fissate, si determini la massima energia  $\Delta E$  acquisita dalla cavità, e il massimo numero di giri eseguiti dalla particella prima di essere estratta.

Assumendo che il protone non raggiunga energie ultrarelativistiche si ha

$$E_f = m_p c^2 \sqrt{1 + \left( \frac{e B}{R m_p c^2} \right)^2} .$$

e, pertanto, l'energia acquisita dalle cavità è

$$E_K = \frac{e B}{R m_p c^2} ,$$

mentre il numero di giri necessari per accumularla è

$$n = \frac{1}{2} \frac{e B}{R m_p c^2 \Delta E} .$$

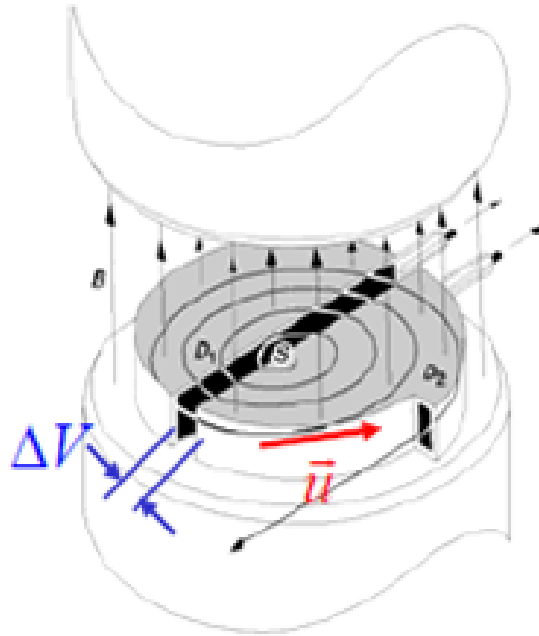


Fig. 46: Schema di un ciclotrone di Lawrence.

### 2.3.12 Esercizio

Si dimostri che la frequenza di rotazione della particella carica all'interno della camera del ciclotrone è data da

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma}, \quad \nu_0 = \frac{e B}{2 \pi m} \quad (168)$$

dove  $\gamma$  è l'energia acquisita durante il processo di accelerazione all'interno delle cavità.

Dalla eq. (166) si ottiene  $m \gamma \omega = q B \dots$ . Si rifletta sul fatto che il campo a radio-frequenza accelerante è inizialmente accordato alla frequenza  $\nu_0$  in modo da garantire l'accelerazione ad ogni attraversamento della gap diventa, al crescere dell'energia, non sincrono e pertanto le particelle vengono estratte. Per tale ragione sono stati inventati i sincrotroni.

### 2.3.13 Esercizio

Si studino le equazioni di moto relativistiche di un elettrone sottoposto al campo elettrico di 1 V e si determini in quanto tempo l'elettrone acquisirà una velocità di 0.5 c.

### 2.3.14 Esercizio

Con riferimento al problema precedente si calcoli in quanto tempo l'elettrone avrà raggiunto una energia cinetica di 5 keV.

### 2.3.15 Esercizio

Si determini il campo elettrico accelerante necessario per portare un protone all'energia necessaria perché si realizzi la reazione di Fig. 42.

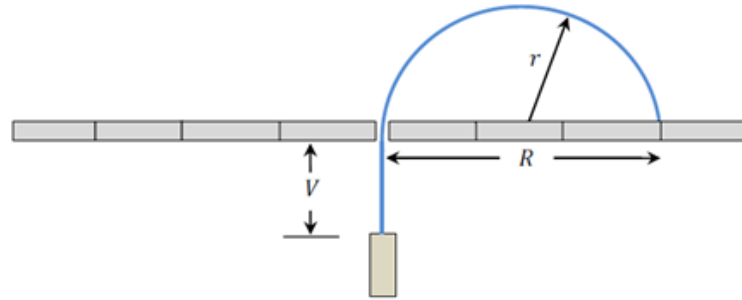


Fig. 47: Geometria dello spettrometro di massa.

### 2.3.16 Esercizio

Si studino le equazioni di moto relativistiche di un elettrone sottoposto all'effetto combinato di un campo elettrico e magnetico.

### 2.3.17 Esercizio

Un campo magnetico viene utilizzato per filtrare l'energia di un fascio di particelle cariche, ovvero per ottenere un fascio con una dispersione di energia minore di quella del fascio originale. Il sistema, una sorta di spettrometro di massa, è quello illustrato in Fig. 47. Le particelle, ad esempio elettroni vengono fatti entrare all'interno di un magnete (detto magnete curvante) qui eseguono una traiettoria circolare e intercettano un foro di uscita. Le dimensioni del foro determinano l'effetto selettivo.

Dato un fascio di elettroni con una distribuzione di energia gaussiana con media 5 MeV e varianza 5 keV, si dimensiona il magnete curvante in modo che la varianza venga ridotta a 0.5 keV.

Se si assume un campo magnetico di 0.1 T, e utilizzando 5 MeV di energia media, dalla (167) si ottiene un valore di 0.165 m per il raggio medio dell'orbita eseguita dagli elettroni all'interno del magnete; la dispersione (causata dalla dispersione energetica  $\sigma_E$ ) intorno a tale valore medio sarà:

$$\sigma_R = R \frac{\sigma_E}{E}$$

che può essere usata come valore di riferimento per il diametro del foro di uscita. Nel caso in esame, risulterà  $\sigma_R = 165 \mu\text{m}$ . Per ottenere un fascio con una dispersione energetica 10 volte più piccola, ovvero  $\sigma_E/E = 10^{-4}$ , il foro di uscita avrà un diametro pari a  $16.5 \mu\text{m}$ . La procedura descritta è piuttosto semplificata, ma efficace per una prima determinazione dei parametri di riferimento.

### 2.3.18 Esercizio

Si studino le equazioni di moto di un fascio di elettroni (relativistico) all'interno di un magnete solenoidale.

### 2.3.19 Esercizio

Si considerino le eq. (60) in cui si identificano le variabili cinematiche relativistiche in termini di funzioni trigonometriche. Si riscrivano le equazioni di moto di una particella relativistica soggetta ad una forza costante in termini di tali variabili e se ne commenti il significato.

In base a quanto prima discusso avremo che l'impulso di una particella può essere scritto come

$$p = m_0 \gamma v = c \tan \varphi$$

da cui segue che

$$\frac{d}{dt} \tan \varphi = f \quad \left( f = \frac{F}{m_0 c} \right).$$

L'evoluzione della fase può essere pertanto calcolata dalla relazione

$$\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}} = i f t$$

che fornisce

$$e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{1 + i f t}{1 - i f t}}$$

Poiché  $\beta = \sin \varphi$ , si ha:

$$\beta = \frac{f t}{\sqrt{1 + (f t)^2}}. \quad (169)$$

### 2.3.20 Esercizio

*Si faccia la stessa cosa dell'esercizio precedente nel caso delle funzioni iperboliche.*

In base alla seconda equazione nella (49), possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \sinh \alpha = f$$

$$e^{\pm \alpha} = \pm f t + \sqrt{1 + (f t)^2}.$$

La quantità  $e^\alpha$  viene detta **rapidità**.

### 2.3.21 Esercizio

*Si dimostri che*

$$e^\alpha = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln[\gamma(1 + \beta)] \quad (170)$$

### 2.3.22 Esercizio

*È evidente che oltre alla rapidità “iperbolica” è possibile definire una rapidità “circolare”. Si utilizzi quanto illustrato in Fig. 48 per ottenere una corrispondenza tra i due concetti.*

### 2.3.23 Esercizio

*Si definisca lo “shift” Doppler relativistico tramite il parametro (170).*



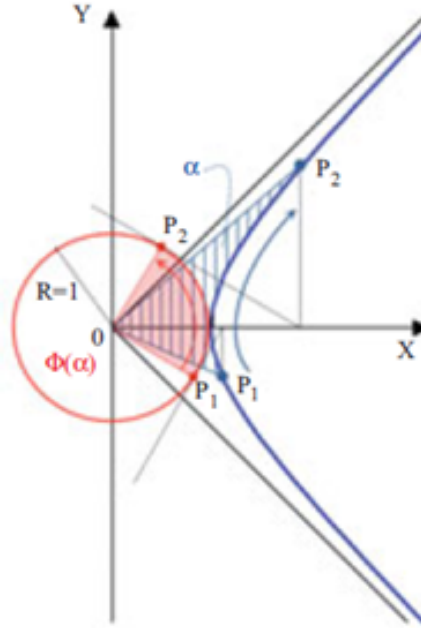


Fig. 48: Corrispondenza tra gli angoli in trigonometria circolare ed iperbolica e visualizzazione delle rapidità.

### 2.3.24 Esercizio

Si dimostri che la legge di composizione relativistica delle velocità è ottenibile dalla proprietà di “semigrupp” dell’esponenziale.

$$e^\lambda = e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2}.$$

Dalla eq. (170) segue che

$$e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \frac{1 + \beta_2}{1 - \beta_2}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (171)$$

da cui si ricava

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \quad (172)$$

che è la legge di composizione delle velocità derivata prima in modi diversi.

Consideriamo ora quanto illustrato nella Fig. 49 che mostra una sorgente di luce in moto con velocità  $v$  verso un osservatore A e in allontanamento da un osservatore B, entrambi fermi nel sistema di riferimento del laboratorio. Supponiamo ora che la sorgente emetta radiazione a una certa lunghezza d’onda; in un intervallo di tempo  $\Delta t$  gli osservatori A e B riceveranno una lunghezza d’onda pari a

$$\lambda_A = (c - v) \Delta t, \quad \lambda_B = (c + v) \Delta t.$$

e, quindi, una frequenza pari a

$$\nu_A = f(\beta) \nu_0, \quad \nu_B = f(-\beta) \nu_0,$$

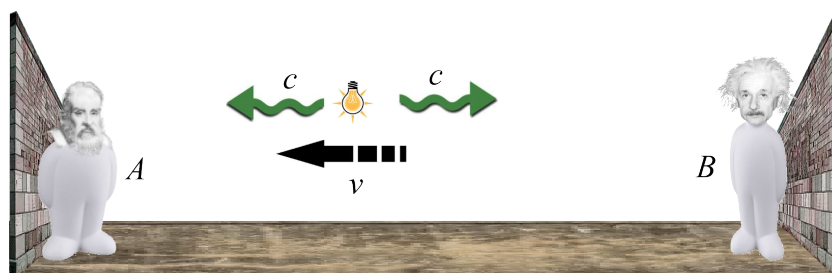


Fig. 49: Sorgente di luce in moto.

dove  $\nu_0$  è la frequenza emessa dalla sorgente nel proprio sistema di riferimento, e  $f(\beta)$  è una funzione, per il momento, non definita<sup>23</sup>. Non è difficile rendersi conto che dai postulati della Relatività Ristretta segue che

$$f(\beta) f(-\beta) = 1, \quad \lambda \nu_{A,B} = c.$$

La forma esplicita della funzione  $f$  si ottiene dalle relazioni precedenti ed è data da

$$f(\beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (173)$$

### 2.3.25 Esercizio

*Si suggerisca un metodo per utilizzare l'effetto Doppler relativistico per provare sperimentalmente la legge di composizione delle velocità.*

### 2.3.26 Esercizio

*Si consideri un sistema in moto uniformemente accelerato e si dimostri che una possibile forma per la trasformazione di Lorentz tra questo sistema e quello del laboratorio è data da*

$$\begin{aligned} x &= \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) x' + c \int_0^{t'} d\tau \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \\ ct &= \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) x' + \int_0^{t'} d\tau \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{aligned} \quad (174)$$

dove

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{\gamma}$$

*e  $a$  rappresenta l'accelerazione misurata nel sistema in cui il sistema accelerato è istantaneamente fermo (ovvero il sistema del laboratorio).*

<sup>23</sup> Potrebbe apparire una scelta arbitraria quella di assumere che l'effetto relativistico sulla frequenza sia esprimibile tramite una funzione dipendente solo da  $\beta = v/c$ . Una giustificazione piuttosto semplice è basata su considerazioni di carattere dimensionale.

**2.3.27 Esercizio**

Si derivi, se possibile, una legge di composizione delle velocità dalla eq. (174).

Il cosiddetto calcolo di Bondi è ampiamente utilizzato in Relatività Ristretta perché offre un metodo semplice ed intuitivo per affrontare sia problemi di calcolo che questioni di natura concettuale. Il calcolo fa uso del parametro rapidità  $K = e^\alpha$ .

**2.3.28 Esercizio**

Si usi tale definizione per esprimere le trasformazioni di Lorentz come

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda(K) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K + \frac{1}{K} & K - \frac{1}{K} \\ K - \frac{1}{K} & K + \frac{1}{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (175)$$

**2.3.29 Esercizio**

Si dimostri che due trasformazioni di Lorentz successive sono rappresentate dalla matrice  $\Lambda(K_1 K_2)$ .

**2.3.30 Esercizio**

Si utilizzi la seguente relazione operatoriale  $a^x \partial_x f(x) = f(ax)$  per dimostrare che

$$\Lambda(K_1 K_2) = K_2^{K_1 \partial_{K_1}} \Lambda(K_1). \quad (176)$$

**2.3.31 Esercizio**

Si faccia uso della ulteriore identità  $e^{\lambda \partial_x} f(x) = f(x + \lambda)$  per dimostrare che le trasformazioni di Lorentz possono essere scritte come:

$$x' = e^{-v t \partial_x} [\gamma^{x \partial_x} (x)], \quad t' = e^{-(v/c^2) x \partial_t} [\gamma^{t \partial_t} (t)]. \quad (177)$$