

TITOLO Analogia tra le formule di trasporto per fasci laser ed il simbolismo usato per l'ottica di macchine acceleratrici.

NOME
M. Preger

Le formule usate per descrivere l'andamento di un fascio laser (vedi LNF 79/4(R) "Geometry of Gaussian beams and laser cavities") sono del tutto analoghe a quelle adoperate in ottica di macchine acceleratrici per descrivere l'involuppo dei fasci, e possono essere quindi adoperate per il calcolo di sistemi ottici costituiti essenzialmente da spazi di drift e lenti convergenti e divergenti.

La distribuzione di intensita' di un fascio laser a simmetria cilindrica in funzione della distanza z dall'asse e' data da:

$$I(r) = I_0 \exp(-2r^2/w^2) \quad (1)$$

e si definisce come "raggio" della distribuzione il valore $r = w$ per cui $I = I_0/e^2$. I punti di raggio minimo, con fronte d'onda piano, sono detti "waists".

Confrontando la (1) con la consueta espressione per una distribuzione gaussiana

$$I(r) = I_0 \exp(-r^2/2\sigma^2) \quad (2)$$

si trova

$$w = 2\sigma \quad (3)$$

e quindi il raggio della distribuzione e' pari a 2 deviazioni standard della gaussiana. Per la larghezza a meta' altezza (FWHM) si ha

$$\text{FWHM} = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} = w\sqrt{2\ln 2} = 1.177 w \quad (4)$$

La propagazione del raggio a partire da un waist w_0 e' data da

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/a_0)^2} \quad (5)$$

con

$$a_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (6)$$

dove λ e' la lunghezza d'onda del laser. Questa propagazione corrisponde all'andamento della distribuzione standard σ di un fascio di particelle

$$\sigma(z) = \sigma_0 \sqrt{\frac{\beta(z)}{\beta_0}} \quad \beta(z) = \beta_0 \left(1 + \frac{z^2}{\beta_0^2}\right) \quad (7)$$

a condizione di porre

$$\beta_0 = a_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (8)$$

In LNF 79/4 e' definita anche la divergenza angolare del fascio laser

$$\theta(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \frac{1}{\sqrt{1 + (a_0/z)^2}} \quad (9)$$

Dalla (7) si ottiene l'analogia espressione con le funzioni di Twiss

$$\theta(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{w_0}{\sqrt{\beta_0}} \frac{\beta'(z)}{2\sqrt{\beta(z)}} = - \frac{w_0}{\sqrt{\beta_0}} \frac{\alpha(z)}{\sqrt{\beta(z)}} \quad (10)$$

e quindi la curvatura del fronte d'onda $R(z)$

$$R(z) = \frac{w(z)}{\theta(z)} = - \frac{w_0 \sqrt{\beta(z)} \sqrt{\beta_0} \sqrt{\beta(z)}}{\sqrt{\beta_0} w_0 \alpha(z)} = - \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \quad (11)$$

Per un tratto dritto a partire da un waist

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{z^2}{\beta_0} \quad \alpha(z) = - \frac{z}{\beta_0} \quad (12)$$

e quindi

$$R(z) = \frac{z^2 + \beta_0^2}{z} \quad (13)$$

La matrice di trasporto per una lente sottile e' data da

$$M_{Ls} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

con $F > 0$ per una lente convergente. Indicando con un + le funzioni ottiche dopo la lente e con un - quelle prima della lente, si ha

$$\begin{cases} \beta^+ = \beta^- \\ \alpha^+ = \alpha^- + \frac{\beta^-}{F} \end{cases} \quad (15)$$

Dividendo la seconda espressione per $-\beta$ si ottiene

$$-\frac{\alpha^+}{\beta^+} = -\frac{\alpha^-}{\beta^-} - \frac{1}{F} \quad (16)$$

del tutto equivalente all'espressione usata in LNF 79/4

$$\frac{1}{R^+} = \frac{1}{R^-} - \frac{1}{F} \quad (17)$$

Per calcolare l'involuppo di un fascio laser a partire dalla uscita del laser stesso occorre quindi conoscere il valore del raggio e della curvatura in questo punto iniziale, indicato quasi sempre nel manuale del laser. Da questo valore si ricava il valore iniziale delle funzioni di Twiss

$$\beta_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \alpha_0 = 0 \quad \gamma_0 = \frac{1}{\beta_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \quad (18)$$

e si può quindi propagare le funzioni ottiche attraverso il canale con le consuete regole che qui ricordo, indicando sempre con un - i valori all'inizio di un elemento e con un + quelli alla fine.

A) Tratto dritto di lunghezza L

$$\begin{cases} \beta^+ = \beta^- - 2\alpha^-L + \gamma^-L^2 \\ \alpha^+ = \alpha^- - \gamma^-L \\ \gamma^+ = \frac{1 + \alpha^{+2}}{\beta^+} = \gamma^- \end{cases} \quad (19)$$

B) Lente sottile di focale F (> 0 per una lente convergente)

$$\begin{cases} \beta^+ = \beta^- \\ \alpha^+ = \alpha^- + \frac{\beta^-}{F} \\ \gamma^+ = \frac{1 + \alpha^{+2}}{\beta^+} = \gamma^- + \frac{\beta^-}{F^2} + \frac{2\alpha^-}{F} \end{cases} \quad (20)$$

Il raggio della distribuzione, l'apertura angolare e la curvatura si possono viceversa calcolare, in ogni punto del canale, dalle relazioni

$$\begin{cases} w(z) = \sqrt{\frac{\lambda \beta(z)}{\pi}} \\ \theta(z) = -\alpha(z) \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \beta(z)}} \\ R(z) = -\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \end{cases} \quad (21)$$

Per le condizioni iniziali del nostro laser si ha

$$\begin{aligned} w_1 &= .95 \text{ mm} & R_1 &= 40 \text{ m} \\ \beta_1 &= \frac{w_1^2 \pi}{\lambda} = 5.5 \text{ m} & \alpha_1 &= -\frac{\beta_1}{R_1} = -.55 \end{aligned} \quad (22)$$

Per avere un esempio del possibile utilizzo di questo formalismo sono stati scritti due programmi BASIC, riportati in Appendice: il primo, immagazzinato sul File WL (Waist Lela), calcola la distanza tra la lente convergente e quella divergente usate nel telescopio dell'esperimento necessaria per avere un waist nel centro dell'ondulatore. Il secondo invece (File PLWL) da un grafico dell'andamento del raggio lungo il canale ad ottica prefissata. Un esempio dell'uscita del programma PLWL e' riportato in Fig.1 per diverse distanze tra le due lenti del telescopio.

```
100 REM PROGRAMMA RICERCA WAIST LELA
110 REM FILE WL 5/10/84
120 DIM WC6],FC6],LC6],BC6],AC6],GC6]
130 FOR K=1 TO 6
140 READ WCK]
150 LET LCK]=0
160 NEXT K
170 FOR K=1 TO 6
180 READ FCK]
190 NEXT K
200 READ L1,W0,R0
210 LET BC1]=3.14159*W0*W0/L1
220 PRINT BC1]
230 LET AC1]]=-BC1]/R0
240 LET GC1]=(1+AC1]*AC1])/BC1]
250 LET D=10.885
260 PRINT "DISTANZA PRIMALENTE";
270 INPUT LC2]
280 LET D1=.001
290 LET X1=LC2]
300 PRINT "INNESCO"
310 INPUT X2
320 LET LC2]=X1
330 LET LC4]=X2
340 LET LC6]=D-X2-X1
350 GOSUB 1000
360 LET R2=AC6]
370 LET R1=ABS(AC6])
380 IF R1<.0001 THEN 500
390 LET LC4]=X2+D1
400 LET LC6]=D-LC4]-LC2]
410 GOSUB 1000
420 LET R3=AC6]
430 LET D8=(R3-R2)/D1
440 LET X2=X2-R2/D8
450 LET LC4]=X2
460 LET LC6]=D-LC2]-LC4]
470 GOSUB 1000
480 PRINT AC6],LC4]
490 GOTO 360
500 LET W=W0*SQR(BC6]/BC1])
510 PRINT
520 PRINT W,AC6],X2
530 PRINT
540 GOTO 260
1000 REM SUBROUTINE TRASPORTO
1010 FOR K=2 TO 6
1020 IF WCK]=2 THEN 1070
1030 LET BCK]=BCK-1]-2*ACK-1]*LCK]+GCK-1]*LCK]*LCK]
1040 LET ACK]=ACK-1]-GCK-1]*LCK]
1050 LET GCK]=(1+ACK]*ACK])/BCK]
1060 GOTO 1100
1070 LET BCK]=BCK-1]
1080 LET ACK]=ACK-1]+BCK-1]/FCK]
1090 LET GCK]=(1+ACK]*ACK])/BCK]
1100 NEXT K
1110 RETURN
5000 DATA 0,1,2,1,2,1
5010 DATA 0,0,-.5,0,1,0
5020 DATA 5.14500E-07,.00095,10
9000 END
```

APPENDICE 1

```
100 REM PROGRAMMA PLOT DEL CANALE LUCE LASER
```

```
110 REM FILE PLWL
```

```
130 FOR K=1 TO 5
```

```
140 READ WCKJ,LCKJ,FCKJ
```

```
145 PRINT WCKJ,LCKJ,FCKJ
```

```
150 NEXT K
```

```
155 LET L1=10.885
```

```
160 LET LC5J=L1-LE1J-LE3J
```

APPENDICE 2

```
165 PRINT LC5J
```

```
170 READ L2,W0,P1,R0
```

```
180 LET N1=1
```

```
190 LET B0=P1*W0*W0/L2
```

```
200 LET B1=B0
```

```
210 LET A1=-B0/R0
```

```
220 LET G1=(1+A1*A1)/B1
```

```
230 LET M=W0
```

```
240 LET X=0
```

```
250 FOR K=1 TO 5
```

```
260 IF WCKJ=2 THEN 450
```

```
270 LET L5=LCKJ/100
```

```
280 FOR J=1 TO 100
```

```
290 LET L6=J*L5
```

```
295 LET X1=X+L6
```

```
300 LET B2=B1-2*A1*L6+G1*L6*L6
```

```
310 LET W3=W0*SQR(B2/B0)
```

```
320 IF N1=2 THEN 360
```

```
330 IF W3 <= M THEN 380
```

```
340 LET M=W3
```

```
350 GOTO 380
```

```
360 LET W4=W3*1000
```

```
370 CALL POINT(X1,W4,1)
```

```
380 NEXT J
```

```
390 LET X=X+LCKJ
```

```
400 LET B1=B2
```

```
410 LET A2=A1-G1*LCKJ
```

```
420 LET A1=A2
```

```
430 LET G1=(1+A1*A1)/B1
```

```
440 GOTO 480
```

```
450 LET A2=A1+B1/FCKJ
```

```
460 LET A1=A2
```

```
470 LET G1=(1+A1*A1)/B1
```

```
480 NEXT K
```

```
490 IF N1=2 THEN 9000
```

```
500 LET N1=2
```

```
510 PRINT "W MASSIMO =";1000*M
```

```
520 PRINT "MASSIMO SCALA VERTICALE =";
```

```
530 INPUT W9
```

```
540 PRINT "TACCHE =";
```

```
550 INPUT W8
```

```
560 PRINT "CIFRE DECIMALI =";
```

```
570 INPUT D8
```

```
580 CALL LIMIT(3,3,20,15)
```

```
590 CALL SCALE(0,L1,0,W9,1)
```

```
600 CALL LSIZE(.2,.2)
```

```
610 CALL XAX(0,0,L1,1,1,0,1)
```

```
620 CALL YAX(0,0,W9,W8,1,D8,1)
```

```
630 CALL YAX(L1,0,W9,W8,0,0,1)
```

TITOLO

NOME

```

640 LET L5=0
650 FOR K=1 TO 5
660 LET L5=L5+LCKJ
670 IF WCKJ=1 THEN 690
680 CALL YAX(L5,0,W9,0,0,0,1)
690 NEXT K
700 CALL PEN(1)
710 LET W1=W0*1000
720 CALL POINT(0,W1,1)
730 CALL PEN(0)
740 GOTO 190
1000 DATA 1,1.425,0
1010 DATA 2,0,-.5
1020 DATA 1,.536829,0
1030 DATA 2,0,1
1040 DATA 1,8,0
1050 DATA 5.14500E-07,.00095,3.14159,10
9000 END
    
```

