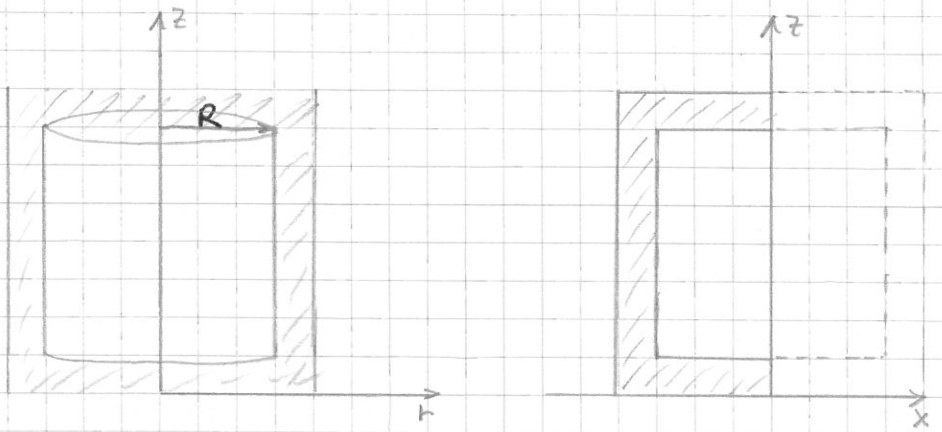
LABORATORI NAZIONALI DI FRASCATI DELL'INFN DIVISIONE MACCHINE - MEMORANDUM INTERNO	DATA 28/2/1983	Pag. 1
	Gruppo e Numero EC-3	
TITOLO -CALCOLO DI UN CAMPO MAGNETICO IN SIMMETRIA CILINDRICA A PARTIRE DA UNA SOLUZIONE IN SIMMETRIA PIANA (MAGNET).-	NOME M.E. Biagini	

Si vuole conoscere il campo magnetico di un solenoide avvolto da un mantello di ferro e con simmetria in φ ($B_\varphi = 0$) a partire dalla soluzione nota (programma MAGNET) in due dimensioni in simmetria piana. Spaccare il solenoide lungo l'asse z (vedi figura) equivale ad un cambiamento di variabili da (r, z) ad (x, z).



A priori si potrebbe pensare che i campi magnetici calcolati nelle due configurazioni concidano.

Chiamiamo $\vec{B}$ l'induzione magnetica nel caso a simmetria cilindrica, e $\vec{D}$ l'induzione nel caso piano (MAGNET), e scriviamo le equazioni di Maxwell nei due casi, limitandoci per semplicità al caso senza ferro.

A) Simmetria cilindrica: $\vec{B} \equiv (B_r, 0, B_z)$.

Le equazioni di Maxwell sono:

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_o J \qquad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \mu_o J$$

(la corrente gira come φ)

B) Simmetria piana: $\vec{D} \equiv (D_x, 0, D_x)$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \qquad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{D} = \mu_o J \qquad \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} = \mu_o J_y$$

(la corrente ha la direzione y)

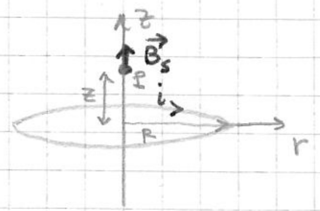
I due set di equazioni sono chiaramente diversi, va perciò trovata una strada per ricavare il campo $\vec{B}$ dal campo $\vec{D}$.

Un esempio più chiaro di come le due simmetrie corrispondano a due campi diversi si può ricavare dall'esame del campo magnetico sull'asse di una spira.

Scriviamo il campo magnetico in simmetria "polare", sull'asse nel punto P:

$$\boxed{B_s = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

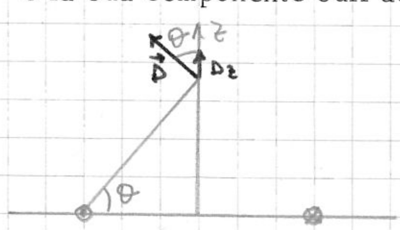
Tagliamo ora la spira con un piano che contenga l'asse; si ha la riduzione del problema alla simmetria piana: due fili (corrente ortogonale al foglio)



Per il primo filo il campo nel punto P è:

$$D = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

e la sua componente sull'asse:



$$D_z = |\vec{D}| \cos\vartheta = \frac{D\,R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

cioè:

$$D_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)}$$

che va moltiplicato per 2 perché sono due fili.

Quindi il campo magnetico sull'asse nella simmetria piana è:

$$\boxed{D_z = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)}}$$

che non è lo stesso che per una spira.

Cerchiamo ora un legame tra $\vec{B}$ e $\vec{D}$ per il solenoide. Assumiamo di conoscere dal programma MAGNET le due componenti D_x e D_z (in MAGNET la z è chiamata y). Consideriamo i due set di equazioni cui obbediscono i due campi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \mu_o J \qquad\qquad \frac{\partial D_x}{\partial z} - \frac{\partial D_z}{\partial x} = \mu_o J_y$$

Possiamo scrivere una relazione tra $\vec{B}$ e $\vec{D}$ introducendo un nuovo vettore $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{D} + \vec{E}}$$

E avrà simmetria cilindrica come $\vec{B}$ ($\vec{E} \equiv (E_r, 0, E_z)$). Poiché le espressioni scritte per rot $\vec{B}$ e rot $\vec{D}$ sono le stesse, sarà:

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

Sostituendo, ed identificando $x \rightarrow r$, si ha:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rD_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ed usando la prima equazione in $\vec{D}$, si ottiene:

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_r}{\partial r} = - \frac{D_r}{r}$$

dove D_r è la componente D_x calcolata da MAGNET.

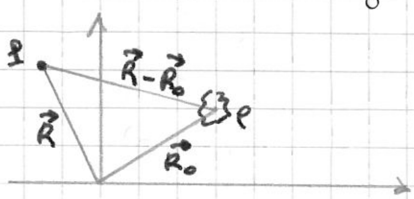
Questa è l'espressione della divergenza di $\vec{E}$, perciò il vettore $\vec{E}$ è definito dalle due equazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= - \frac{D_r}{r} \\ \text{rot } \vec{E} &= 0 \end{aligned}}$$

Queste due equazioni sono esattamente le stesse cui obbedisce il campo elettrostatico nel vuoto, purché si ponga:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = - \frac{D_r}{r}$$

La similitudine col campo elettrico ci aiuta nel calcolo di $\vec{E}$. Scriviamo infatti il campo elettrostatico nel punto P dovuto ad una distribuzione di carica ρ e integrato sull'elemento di volume dv_o:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(R_o) \frac{(\vec{R} - \vec{R}_o)}{|\vec{R} - \vec{R}_o|^3} \, dv_o$$

Esprimendo l'elemento di volume dv_o in coordinate cilindriche:

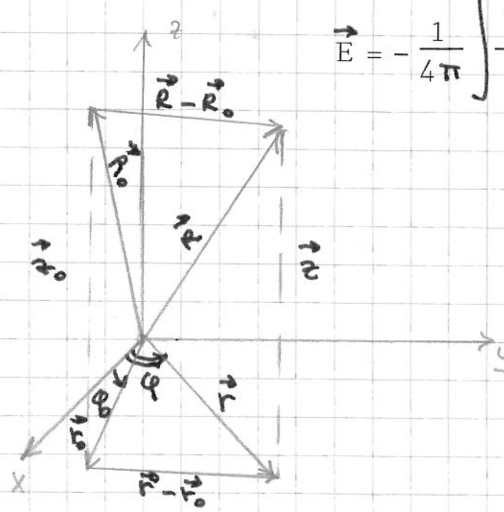
$$dv_o = r_o \, dr_o \, d\varphi_o \, dz_o$$

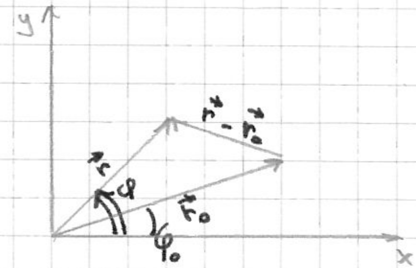
e sostituendo:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow - \frac{D_{r_o}}{r_o}$$

si ha il vettore $\vec{E}$ desiderato:

$$\vec{E} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{D_{r_o}}{r_o} \frac{(\vec{R} - \vec{R}_o)}{|\vec{R} - \vec{R}_o|^3} \, r_o \, dr_o \, d\varphi_o \, dz_o$$





$$|\vec{R} - \vec{R}_o|^2 = |\vec{r} - \vec{r}_o|^2 + |\vec{z} - \vec{z}_o|^2$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_o|^2 = r^2 + r_o^2 - 2 \, r \, r_o \cos(\varphi - \varphi_o)$$

perciò:

$$\left|\vec{R}-\vec{R}_o\right|^2 = r^2 + r_o^2 - 2\,r\,r_o\cos(\varphi-\varphi_o) + (z-z_o)^2$$

Calcoliamo la proiezione del vettore $\vec{E}$ lungo l'asse z:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi}\int D_{r_o}\frac{(z-z_o)\,dr_o\,d\varphi_o\,dz_o}{\left(r^2+r_o^2-2r\,r_o\cos(\varphi-\varphi_o)+(z-z_o)^2\right)^{3/2}}$$

La componente radiale di $\vec{E}$ è:

$$E_r = -\frac{1}{4\pi}\int D_{r_o}\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}_o\right|\,dr_o\,d\varphi_o\,dz_o}{\left(r^2+r_o^2-2\,r\,r_o\cos(\varphi-\varphi_o)+(z-z_o)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int D_{r_o}\frac{\sqrt{r^2+r_o^2-2r\,r_o\cos(\varphi-\varphi_o)}\,dr_o\,d\varphi_o\,dz_o}{\left(r^2+r_o^2-2r\,r_o\cos(\varphi-\varphi_o)+(z-z_o)^2\right)^{3/2}}$$

Si può operare il cambiamento di variabile $(\varphi-\varphi_o)\rightarrow\varphi_o$. Si hanno così le due componenti di $\vec{E}$ che vanno sommate alle due componenti di $\vec{D}$ per avere il campo $\vec{B}$ desiderato:

$$\boxed{\begin{aligned} E_z &= -\int_0^{2\pi}d\varphi_o\int_{-\infty}^{\infty}dzo\int_0^{\infty}dro\,\frac{D_{r_o}(z-z_o)}{\left(r^2+r_o^2-2\,r\,r_o\cos\varphi_o+(z-z_o)^2\right)^{3/2}}\\ E_r &= -\int_0^{2\pi}d\varphi_o\int_{-\infty}^{\infty}dzo\int_0^{\infty}dro\,\frac{D_{r_o}\sqrt{r^2+r_o^2-2r\,r_o\cos\varphi_o}}{\left(r^2+r_o^2-2r\,r_o\cos\varphi_o+(z-z_o)^2\right)^{3/2}}\end{aligned}}$$

In pratica per calcolare E_z ed E_r utilizzando i risultati di MAGNET occorre modificare quest'ultimo in modo tale da poter disporre di un file di dati contenente i valori di D_z e D_r. l'integrazione in φ_o si può fare mediante gli integrali ellittici incompleti che si trovano nella biblioteca di programmi del CERN (routine ELLICE, C 308).